

DOI: <https://doi.org/10.46296/ig.v7i13edespab.0181>

SIMULACIÓN DE LA VIBRACIÓN DE UN RODAMIENTO BAJO CONDICIONES DE FALLA COMUNES CON FINES DIDÁCTICOS

SIMULATION OF BEARING VIBRATION UNDER COMMON FAILURE CONDITIONS FOR EDUCATIONAL PURPOSES

Villarroel Jorge L. ¹

¹ Universidad Técnica de Cotopaxi. Latacunga, Ecuador.

Correo: jorge.villarroel3491@utc.edu.ec. ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-0320-9999>

Resumen

Existe una teoría muy extensa y completa sobre el análisis de vibraciones en rodamientos, que suele enseñarse en cursos de mantenimiento predictivo pero que puede resultar difícil de entender e interpretar. El objetivo del presente artículo es generar un modelo matemático de vibración que se base en las condiciones de operación y las propiedades inherentes de los rodamientos de una hilera de bolas, y que permita visualizar en gráficas de amplitud versus tiempo y amplitud versus frecuencia cuando tiene una falla común para ser utilizado de manera didáctica, considerando esta falla común como una picadura muy pequeña presente en uno de los componentes (pista externa, pista interna, jaula y bolas) la misma que al chocar con otra parte genera una vibración. que tiene un espectro característico.

Palabras clave: Modelado matemático, rodamientos, vibraciones.

Abstract

There is a very extensive and complete theory about the analysis of vibration in bearings, which is usually taught in predictive maintenance courses but can be difficult to understand and interpret. The objective of the present article is to generate a mathematical model of vibration that is based on the operating conditions and the inherent properties of the bearings of a row of balls, and that allows to visualize in graphs of amplitude versus time and amplitude versus frequency when it has a common fault to be used in a didactic way, considering this common fault as a very small bite present in one of the components (external track, internal track, cage and balls) the same that when colliding with another part generates a vibration that has a characteristic spectrum.

Keywords: Mathematical modeling, bearing, vibration.

Información del manuscrito:

Fecha de recepción: 16 de enero de 2024.

Fecha de aceptación: 15 de marzo de 2024.

Fecha de publicación: 04 de abril de 2024.



1. Introducción

Un rodamiento (Fig.1.) es un elemento mecánico que reduce la fricción entre un eje y las piezas conectadas a este por medio de una rodadura que le sirve de apoyo y facilita su desplazamiento; se calculan y eligen para un determinado tiempo de vida útil; aun así estos sufren fallas incluso operando bajo condiciones ideales. La vida útil se determina asumiendo que se realiza una instalación adecuada, operación adecuada, basadas en las condiciones de diseño establecidas; cuando alguno de estos criterios no se ejecuta rigurosamente los rodamientos fallan antes de completar el tiempo de uso previsto.

Fig.1. Algunos tipos de rodamientos [1]



La idea fundamental basada en el mantenimiento predictivo es que los rodamientos defectuosos generan frecuencias de vibración a las velocidades de rotación de cada

componente que se pueden calcular y registrar haciendo uso de técnicas rutinarias de análisis vibratorio. Dichas frecuencias rotacionales están relacionadas, con el movimiento de los elementos de rodadura, jaula y pistas; incluyendo el giro de bolas, la rotación de la jaula y la frecuencia de paso de bolas, lo cual involucra su geometría y velocidades relativas entre sus componentes; el análisis de estas características son la parte principal de desarrollo de este artículo.

2. Métodos

2.1 Problemática

Al realizar el análisis de las vibraciones, los resultados son visualizados de dos formas diferentes: en el dominio temporal, en el cual se muestra la amplitud de la vibración respecto del tiempo; y en el dominio frecuencial, que representa la amplitud de la vibración respecto a la frecuencia. El dominio temporal da una idea física de la naturaleza de la vibración, pero el dominio frecuencial es ideal para identificar los componentes frecuenciales característicos de la

vibración (ruidos, defectos, armónicos del sistema).

Identificar estas formas y patrones característicos demanda de gran práctica, conocimiento de matemáticas, física, vibraciones, mantenimiento, etc., que resulta muy complicado de entender cuando se observan por primera vez en los gráficos que proporciona un equipo de medición de vibraciones,

Un rodamiento y su interacción con el eje conductor pueden ser modelados matemáticamente como un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso que se somete a un impulso instantáneo. La solución a esta condición se representa por una ecuación diferencial homogénea que permite modelar de forma aproximada.

Con la ayuda de Matlab se representa la ecuación de vibración para simular las frecuencias forzadas y de falla de los componentes principales. El modelo computacional puede ser adaptado a diferentes tamaños de rodamiento, condiciones de operación y monitoreo. Los espectros generados se comparan con gráficos teóricos aproximados que se usan de manera

didáctica obtenidos de bibliografía existente, para determinar la validez de la forma como los valores de la señal de vibración modelada se acercan y pueden ser usados de forma didáctica. Como trabajo futuro se plantea la generación de un banco de pruebas real con el cual se pueda validar físicamente los resultados obtenidos.

2.2 Medición de la amplitud de vibración

La medición de la amplitud de las vibraciones mecánicas se hace de acuerdo a los siguientes criterios:

En el sistema inglés de medición, el DESPLAZAMIENTO se mide generalmente en mils (Milésimos de pulgada), y el valor Pico a Pico Pk-Pk se usa por convención.

La VELOCIDAD generalmente se mide en pulgadas por segundo y la convención es usar el valor Pico Pk o el valor RPC. Lo más común es de usar el valor pico.

La ACELERACIÓN se mide generalmente en Gs. 1 G es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la tierra. El G en realidad no es una unidad de aceleración, sino más bien es una

cantidad de aceleración. A veces la aceleración se mide en pulgadas por segundo al cuadrado (pulgadas/s²) o m/s², que son unidades verdaderas. Un G es igual a 386 pulgadas / s² o 9.81 m/seg², [2].

Amplitud (Pico - Pk) - Es la distancia de una cresta al punto cero o punto de equilibrio.

Amplitud (Pico a Pico Pk-Pk) - Es la distancia de una cresta negativa hasta una cresta positiva.

Amplitud (Raíz del Promedio de los Cuadrados RPC) - Es la raíz cuadrada del promedio de los cuadrados de los valores de la onda. En el caso de una onda senoidal el valor RPC es igual a 0. 707 del valor pico, pero esto es solo válido en el caso de una onda senoidal. El valor RPC es proporcional al área abajo de la curva. Si se rectifican a los picos negativos es decir se los hace positivos, y el área abajo de la curva resultante está promediado hasta un nivel medio este nivel es proporcional al valor RPC [2]. Tanto el valor Pico, Pico a Pico y el RMS son valores de la amplitud de la vibración que puede corresponder a desplazamiento, velocidad o aceleración.

El análisis espectral está definido como la transformación de una señal del dominio del tiempo hacia el dominio de la frecuencia. Jean Baptiste Fourier fue quien dedujo por primera vez la famosa Serie de Fourier, más tarde la generalizó en la Transformada Integral de Fourier. La llegada del análisis de las señales digitales llevó a la llamada Transformada Discrecional de Fourier TDF y a la Transformada Rápida de Fourier TRF, [2]. El presente artículo utiliza la función pspectrum de MATLAB para obtener la señal de vibración en el dominio de la frecuencia.

2.3 Frecuencias forzadas

El análisis de vibración en maquinaria está basado en el hecho que ciertos elementos tienen velocidades de rotación que producen vibraciones a frecuencias de valores específicos. Entre las frecuencias forzadas más importantes esta la frecuencia del eje principal ocasionada por alguna cantidad de desbalanceo residual de la fabricación que provoca una fuerza centrífuga radial en los rodamientos generando vibración de la estructura a la frecuencia fundamental o llamada también 1x.

Otras frecuencias forzadas son:

- Los tonos de rodamiento o frecuencias de rodamiento que se generan por defectos en los anillos de los rodamientos.
- Las frecuencias que generan los engranajes y se originan en los impactos individuales de los dientes y que es igual al número de dientes en el engrane multiplicado por las RPM del engrane.
- Frecuencias de paso de aspas o de alabes que se asemejan a la frecuencia que generan los engranajes y se determina multiplicando el número de alabes o aspas por las RPM del eje que mueve el impulsor o el ventilador.

Las frecuencias forzadas crean picos en el espectro de vibración, donde la frecuencia indica el tipo de condición y la amplitud indica su gravedad. Los espectros de vibración muchas veces utilizan múltiplos de las RPM de las máquinas para representar en lugar de utilizar unidades de frecuencia hertzio (Hz). A estos múltiplos se les denomina armónicos de una frecuencia y se encuentran de la multiplicación de números

enteros por la frecuencia fundamental. La primera frecuencia o primer armónico se llama $1x$ y corresponde al valor de la frecuencia forzada del eje de la máquina o equipo, el segundo armónico se llama $2x$ y corresponde al valor de la frecuencia forzada multiplicada por dos, el tercer armónico es $3x$ y se determina multiplicando $1x$ por tres, y así sucesivamente.

2.4 Modelado matemático analítico de las frecuencias forzadas

Para modelar matemáticamente se deben determinar y comprender las condiciones en las que se presentan las vibraciones del sistema, estas condiciones pueden ser cinemáticas, dinámicas, térmicas, de resistencia de materiales, fluidos, etc. Un modelo matemático para ser correcto debe contar con un método de medición de vibración que permita obtener y medir las condiciones del modelo, por lo tanto, un modelo que incluya la mayor cantidad de condiciones será más correcto y por ende más complejo de medir. Partiendo de esta premisa el presente trabajo se realizó solo desde el punto de vista cinemático,

es decir no se consideran las fuerzas presentes en el movimiento, las cuales deforman cíclicamente las partes del rodamiento, y se deja planteado para trabajos futuros.

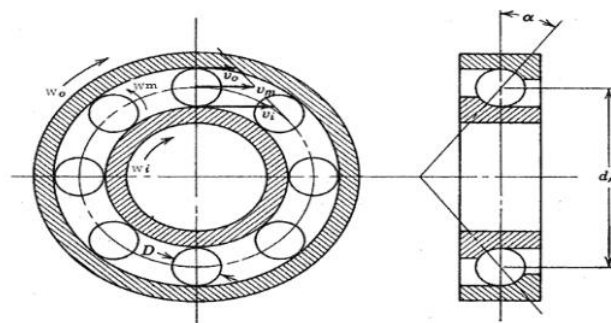
En primer lugar, se desarrollan las ecuaciones de movimiento relativas a cada componente del rodamiento, puesto que cada velocidad generará un valor en el espectro que deberá ser identificado. A continuación, se definen las frecuencias relativas de los componentes del rodamiento: FTF – Frecuencia fundamental del tren (separador), BPFO – Frecuencia de paso de bolas en anillo exterior,

BPFI - Frecuencia de paso de bolas en anillo interior, BSF – Frecuencia de rotación de las bolas.

Gráfico de velocidades relativas en un rodamiento

Para obtener las relaciones de velocidades entre los diferentes elementos rotatorios de un rodamiento se representan a continuación esquemáticamente las velocidades presentes. Estas ecuaciones definen las frecuencias que puede generar un rodamiento con un defecto localizado. La Fig.2. muestra la vista frontal y transversal de la geometría para un rodamiento:

Fig.2. Vista frontal y transversal de la geometría para un rodamiento y sus velocidades [3]



Donde

v_i = Velocidad de la pista interna

v_m = Velocidad de la bola

v_o = Velocidad de la pista externa

D = Diámetro de la bola

dm = Diámetro del rodamiento

w_o = Velocidad angular anillo externo en rpm

w_i = Velocidad angular anillo interno en rpm

w_m = Velocidad angular de bola en rpm

α = Ángulo de contacto medido entre la línea central de la bola y el eje del rodamiento

N_b = Número de bolas del rodamiento

FTF - Frecuencia fundamental del tren separador

Se define como frecuencia de rotación del separador que contiene las bolas y representa la cantidad de giros que realiza cada vez que el eje hace un giro completo. Se determina como velocidad angular del centro de cada bola, Ec. (1).

$$v_m = \frac{v_i + v_o}{2} \quad (1)$$

La ecuación anterior se reemplaza en la definición de la definición de velocidad angular

$$w = \frac{v}{R}$$

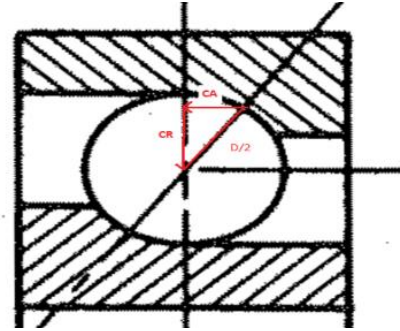
Obteniendo la Ec. (2)

$$w_m = \frac{(v_i + v_o)/2}{d_m/2} = \frac{(v_i + v_o)}{d_m} \quad (2)$$

Ahora se asume que el rodamiento esta solamente sometido a Carga Radial - CR para simplificar los cálculos (lo cual no es cierto, pues aunque los rodamientos no sean de contacto angular, siempre estarán expuestos a alguna cantidad de Carga Axial - CA), para poder

calcular el radio para cada velocidad. Esto se ve en la Fig.3.

Fig.3. Detalle de las cargas en un rodamiento



En la Ec. (2) se reemplaza la relación $v=wR$ en cada miembro,

$$w_m = \frac{(v_i + v_o)}{d_m} = \frac{(w_i R_i + w_o R_o)}{d_m} = \frac{w_i \left(\frac{d_m}{2} - \frac{D}{2} \cos \alpha \right) + w_o \left(\frac{d_m}{2} + \frac{D}{2} \cos \alpha \right)}{d_m} = \frac{w_i}{2} + \frac{w_i D \cos \alpha}{2 d_m} + \frac{w_o}{2} + \frac{w_o D \cos \alpha}{2 d_m}$$

$$FTF = w_m = Abs \left(\frac{1}{2} \left[w_i \left(1 - \frac{D \cos \alpha}{d_m} \right) + w_o \left(1 + \frac{D \cos \alpha}{d_m} \right) \right] \right) [Hz] \quad (3)$$

La Ec. (3) la frecuencia fundamental del tren FTF.

BPFO - Frecuencia de paso de bolas en el anillo exterior

La frecuencia de paso de los elementos rodantes por la pista externa se conoce como BPFO y se define como el número de bolas que pasan por un punto de la pista exterior cada vez que el eje realiza un giro completo. Se calcula como el número de bolitas multiplicado por la velocidad angular relativa entre la

pista exterior una bola o jaula, Ec. (4).

$$BPFO = N_b * Abs(w_m - w_o) \quad (4)$$

En la Ec. (4) se reemplaza la Ec. (3)

$$BPFO = N_b * Abs\left(\frac{1}{2}\left[w_i\left(1 - \frac{D \cos \alpha}{d_m}\right) + w_o\left(1 + \frac{D \cos \alpha}{d_m}\right)\right] - w_o\right)$$

$$BPFO = N_b * Abs\left(\frac{w_i}{2} - \frac{w_i D \cos \alpha}{2d_m} + \frac{w_o}{2} + \frac{w_o D \cos \alpha}{2d_m} - w_o\right)$$

$$BPFO = Abs\left(N_b * \left(\frac{w_i - w_o}{2}\right) - \left(\frac{w_i - w_o}{2}\right) \frac{D \cos \alpha}{d_m}\right)$$

$$BPFO = Abs\left(\frac{N_b}{2}(w_i - w_o)\left(1 - \frac{D \cos \alpha}{d_m}\right)\right) [Hz] \quad (5)$$

La Ec. (5) es la frecuencia de paso de bolas en anillo exterior BPFO

BPFI – Frecuencia de paso de bolas en el anillo interior

La frecuencia de paso de bolas por un defecto en la pista interna se denomina BPFI y se define como el número de bolas que pasan por un punto de la pista interior cada vez que el eje realiza un giro completo. Se calcula como el número de bolas multiplicada por la velocidad angular relativa entre la pista interior y la velocidad del separador o de las bolas Ec. (6).

$$BPFI = N_b * Abs(w_i - w_m) \quad (6)$$

Remplazando la Ec. 3 en la Ec. 6 se tiene

$$BPFI = N_b * Abs\left(w_i - \frac{1}{2}\left[w_i\left(1 - \frac{D \cos \alpha}{d_m}\right) + w_o\left(1 + \frac{D \cos \alpha}{d_m}\right)\right]\right)$$

$$BPFI = N_b * Abs\left(w_i - \frac{w_i}{2} + \frac{w_i D \cos \alpha}{2d_m} - \frac{w_o}{2} - \frac{w_o D \cos \alpha}{2d_m}\right)$$

$$BPFI = Abs\left(N_b * \left(\frac{w_i - w_o}{2}\right) + \left(\frac{w_i - w_o}{2}\right) \frac{D \cos \alpha}{d_m}\right)$$

$$BPFI = Abs\left(\frac{N_b}{2}(w_i - w_o)\left(1 + \frac{D \cos \alpha}{d_m}\right)\right) [Hz]$$

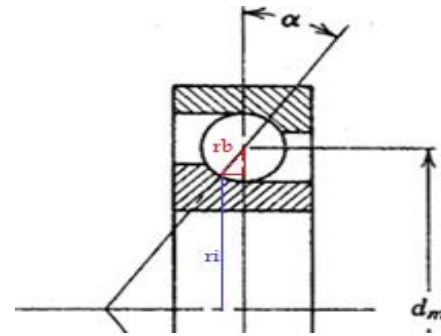
(7)

La Ec. (7) es la frecuencia de paso de bolas por el anillo interior BPFI.

BSF - Frecuencia de rotación de las bolas

Frecuencia de rotación de las bolas es la frecuencia de la velocidad angular de una bola sobre su centro de giro. La BSF puede ser calculada considerando la velocidad lineal de un punto en la pista interior en contacto con la superficie de la bola, la cual se da en la Ec. (8). Ver Fig. 4.

Fig. 4. Detalle del radio de la pista interior



v_b = Velocidad lineal de un punto en la superficie de la bola

r_b = Radio de la bola

r_i = Radio pista interior

$$v_b = (w_i - w_m) \cdot r_i \quad (8)$$

Ahora se divide los dos lados de la ecuación [8] para r_b

$$\frac{v_b}{r_b} = (w_i - w_m) \cdot \frac{r_i}{r_b} \quad (8)$$

$$BSF = w_b = (w_i - w_m) \cdot \frac{r_i}{r_b} = (w_i -$$

$$w_m) \cdot \left(\frac{\frac{d_m}{2} - \frac{D}{2} \cos \alpha}{\frac{D}{2}} \right)$$

$$BSF = w_b = \left(w_i - \frac{1}{2} \left[w_i \left(1 - \frac{D \cos \alpha}{d_m} \right) + \right. \right.$$

$$\left. w_o \left(1 + \frac{D \cos \alpha}{d_m} \right) \right] \right) \cdot \left(\frac{d_m - D \cos \alpha}{D} \right)$$

$$BSF = w_b = Abs \frac{d_m}{2D} (w_i - w_o) \left(1 - \right.$$

$$\left. \frac{D^2 \cos^2 \alpha}{d_m^2} \right) [Hz] \quad (9)$$

La Ec. (9) proporciona la frecuencia de rotación de bolas BSF.

Las Ec. (3) (5) (7) (9) nos ayudan a describir de manera general los valores numéricos de las frecuencias que se generan en un rodamiento y que se pueden identificar en el espectro según el valor que adopten. Acompañando a las frecuencias antes nombradas en espectros reales también se puede identificar la frecuencias del eje y sus armónicos que fueron descritos anteriormente.

$$FTF = w_m = Abs \left(\frac{1}{2} \left[w_i \left(1 - \frac{D \cos \alpha}{d_m} \right) + w_o \left(1 + \frac{D \cos \alpha}{d_m} \right) \right] \right) [Hz] \quad (3)$$

$$BPFO = Abs \left(\frac{N_b}{2} (w_i - w_o) \left(1 - \frac{D \cos \alpha}{d_m} \right) \right) [Hz] \quad (5)$$

$$BPFI = Abs \left(\frac{N_b}{2} (w_i - w_o) \left(1 + \frac{D \cos \alpha}{d_m} \right) \right) [Hz] \quad (7)$$

$$BSF = w_b = Abs \frac{d_m}{2D} (w_i - w_o) \left(1 - \frac{D^2 \cos^2 \alpha}{d_m^2} \right) [Hz] \quad (9)$$

Las ecuaciones (3) (5) (7) y (9) pueden simplificarse considerando que un rodamiento generalmente tiene la pista exterior en ajuste es decir que su velocidad angular es cero

$w_o = 0$ y $w_i = n$ donde n es el número RPM del eje al que esta acoplado el rodamiento.

$$FTF = \frac{n}{120} \left(1 - \frac{D \cos \alpha}{d_m} \right) [Hz] \quad (10)$$

$$BPFO = \frac{n \cdot N_b}{120} \left(1 - \frac{D \cos \alpha}{d_m} \right) [Hz] \quad (11)$$

$$BPFI = \frac{n \cdot N_b}{120} \left(1 + \frac{D \cos \alpha}{d_m} \right) [Hz] \quad (12)$$

$$BSF = \frac{n \cdot d_m}{120D} \left(1 - \frac{D^2 \cos^2 \alpha}{d_m^2} \right) [Hz] \quad (13)$$

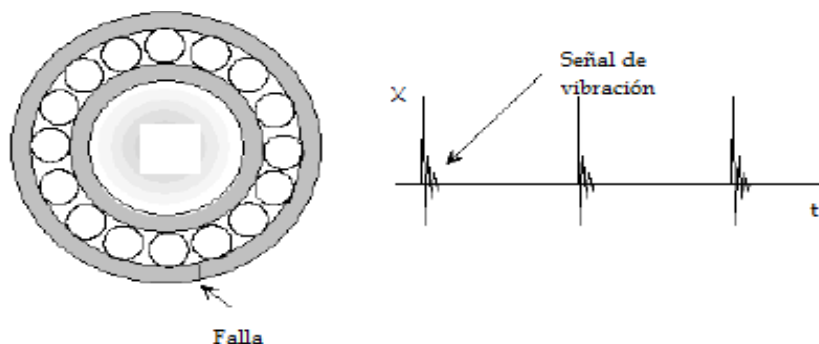
Las ecuaciones (10), (11), (12) y (13) son ideales ya que consideran solamente la componente radial de la carga y que existe rodamiento puro entre las partes en contacto. Adicionalmente en un rodamiento de una hilera de bolas el ángulo de contacto $\alpha=0^\circ$ para rodamientos que no tienen contacto angular, con lo cual las ecuaciones anteriores se simplifican más.

2.5 Modelo de la señal de vibración

En la sección 2.4 se determinó el valor de la frecuencia a las que las fallas comunes se pueden presentar en un rodamiento ante un defecto localizado en alguno de sus componentes. En la presente sección se determinará la forma aproximada de la señal que la falla común presentará cada vez que ocurra, es decir la forma que la señal tendrá cuando se represente como

función del tiempo y de la frecuencia. Para clarificar lo tratado hasta el momento ver la Fig. 5. en donde se muestra el paso de las bolas del rodamiento por una falla en el anillo exterior y el gráfico de la amplitud de vibración versus el tiempo. Las ecuaciones (10), (11), (12) y (13) nos permiten calcular cada que tiempo se produce la vibración en el rodamiento y en este apartado se determina la forma aproximada de la señal de vibración producida por la falla.

Fig.5. Gráfico Ilustrativo de Amplitud vs Tiempo



Se genera un impulso cada vez que sucede una de las siguientes condiciones:

- Una bola golpea un defecto en una pista de rodadura externa o interna.
- Un defecto en una bola golpea una pista de rodadura.

Cada impulso de este tipo excita una vibración transitoria corta,

generalmente los cojinetes giran a velocidad constante y cuando presentan una falla localizada la señal de vibración producida es similar a la señal originada por la función Impulso Unitario [4] que se genera con una fuerza de excitación no periódica que varía con el tiempo, actúa durante un periodo especificado y luego cesa.

El Impulso Unitario se representa mediante la función Delta de Dirac $\delta(t)$ y está definida como

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Y cumple que su área es igual a 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+0} \delta(t) dt = 1$$

El impulso unitario, $f = 1$ que actúa en $t = 0$, se expresa por medio de la función delta de Dirac como

$$f = f\delta(t) = 1 * \delta(t) = \delta(t)$$

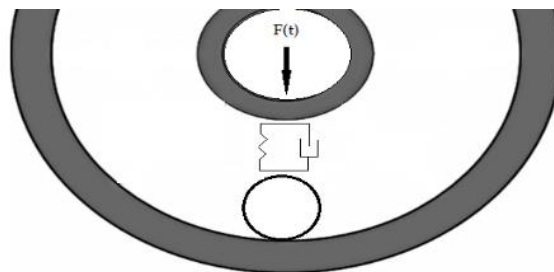
Ahora el impulso de magnitud, $f = F$ que actúa en $t = 0$, se expresa también por medio de la función Delta de Dirac como [12]:

$$F = F\delta(t) \quad (14)$$

El sistema Eje-Rodamiento se puede modelar aproximadamente como un sistema de vibración libre con subamortiguamiento viscoso (masa, resorte y amortiguador viscoso) Fig. 6. el cual está excitado por la función Impulso $F(t)$, [4].

Fig. 6. Sistema Eje-Rodamiento enfocado en la pista interior.

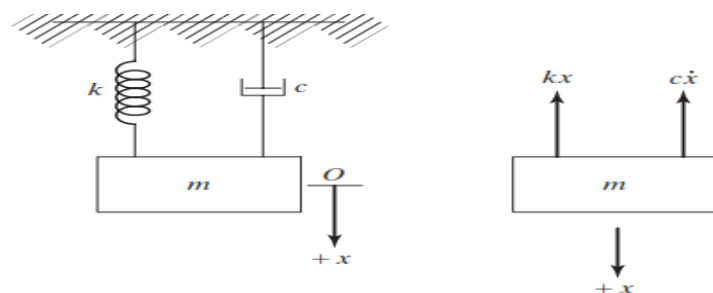
La posición de los elementos del sistema puede cambiar según el componente a analizar [4].



Cada impacto provoca un aumento instantáneo del impulso, lo que da una condición inicial para el sistema.

A continuación se determina la respuesta del sistema subamortiguado.

Fig. 7. Sistema amortiguado de un grado de libertad [5]



Del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 7 y aplicando la segunda ley de Newton al sistema masa-resorte-amortiguador se tiene la siguiente ecuación diferencial homogénea [12]:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (15)$$

Donde m = masa, c =constante de amortiguamiento, k = Constante del resorte

Para resolver la Ec. (15) se supone una solución del tipo

$$x(t) = Ce^{st}$$

Donde C y s son constantes indeterminadas que al remplazar en la Ec. (15) queda

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (16)$$

Las raíces de la ecuación cuadrática anterior son

$$S_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (17)$$

$$S_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$S_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Las raíces anteriores dan las soluciones parciales a la Ec. 15.

$$x_1 = C_1 e^{S_1 t}$$

$$x_2 = C_2 e^{S_2 t}$$

Por lo tanto la solución general puede expresarse como la suma de las dos soluciones anteriores.

$$x(t) = x_1 + x_2 = C_1 e^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} \quad (18)$$

C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que se determinan a partir de las condiciones iniciales del sistema.

Constante de amortiguamiento crítico (C_C). - Se define como el valor que hace cero el radical de la Ec. (17).

$$\left(\frac{C_C}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

$$C_C = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2mw_n \quad (19)$$

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Relación de amortiguamiento (ζ). - Se define como la relación de la constante de amortiguamiento (c) con la constante de amortiguamiento crítico (C_C).

$$\zeta = \frac{c}{C_C} \quad (20)$$

$$w_n \zeta = \frac{c}{2m}$$

Combinando las Ec. (19) y (20) se puede escribir la Ec. (17) como.

$$S_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})w_n$$

Y la solución Ec.18 se presenta como

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})w_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})w_n t} \quad (18)$$

La Ec. (18) es una generalización para los sistemas de vibración libre con un grado de libertad y amortiguamiento viscoso en la que dependiendo del valor que adopte (ζ) pueden existir tres tipos de sistemas: $\zeta < 1$ Sistema Sub Amortiguado, $\zeta = 1$ Sistema Críticamente amortiguado y $\zeta > 1$ Sistema sobre amortiguado.

Para el presente artículo se considera que la señal vibracional que genera la falla se puede modelar como un sistema sub-amortiguado es decir $\zeta < 1$, en cuyo caso la expresión $\zeta^2 - 1$ es negativa y las raíces de la Ec. (18) son complejas.

$$S_1 = (-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2})w_n$$

$$S_2 = (-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2})w_n$$

La respuesta del sistema se puede escribir como

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2})w_n t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2})w_n t}$$

$$x(t) = e^{-\zeta w_n t} (C_1 e^{i\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t})$$

$$x(t) = e^{-\zeta w_n t} (C_1 + C_2) \cos \sqrt{1 - \zeta^2} w_n t + i(C_1 - C_2) \sin \sqrt{1 - \zeta^2} w_n t$$

$$x(t) = e^{-\zeta w_n t} (C'_1 \cos \sqrt{1 - \zeta^2} w_n t + C'_2 \sin \sqrt{1 - \zeta^2} w_n t) \quad (19)$$

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta w_n t} \sin (\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t + \phi_0)$$

$$x(t) = X e^{-\zeta w_n t} \cos (\sqrt{1 - \zeta^2} w_n t - \phi)$$

$(C'_1, C'_2), (X, \phi), (X_0, \phi_0)$ Son constantes arbitrarias que se determinan a partir de las condiciones iniciales. Los valores de (C'_1, C'_2) se determinan con las condiciones iniciales en $t = 0$, $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$ obteniendo

$$C'_1 = x_0$$

$$C'_2 = \frac{\dot{x}_0 + \zeta w_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} w_n}$$

Entonces la Ec. 19 se puede escribir como

$$x(t) = e^{-\zeta w_n t} \left(x_0 \cos \sqrt{1 - \zeta^2} w_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta w_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} w_n} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} w_n t \right) \quad (20)$$

El movimiento que describe la Ec. 20 es un movimiento armónico amortiguado de frecuencia angular ($\sqrt{1 - \zeta^2} w_n$) en el que la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo debido al factor $e^{-\zeta w_n t}$.

$$w_d = \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \right) w_n = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m} \right)^2}$$

(w_d) Se conoce como Frecuencia de vibración amortiguada y siempre es menor que la Frecuencia natural no amortiguada w_n .

Respuesta al impulso

Ahora se determinara la respuesta del sistema Sub Amortiguado de la Ec. 20 cuando es excitado por un impulso unitario analizado en el numeral anterior. La Ec. (20) se puede expresar como

$$x(t) = e^{-\zeta w_n t} \left(x_0 \cos w_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta w_n x_0}{w_d} \sin w_d t \right) \quad (21)$$

Se considera que la masa está en reposo antes de que sea aplicado el impulso, y se determina la Variación de Cantidad de Movimiento Lineal conociendo que su valor es igual 1

que es igual al área de la función impulso.

La Variación de Cantidad de Movimiento Lineal (Δp) se define como la masa multiplicada por la velocidad antes del impulso menos masa multiplicada por la velocidad después del impulso.

$$\Delta p = m\dot{x} - m\dot{x}_0$$

Si la masa está en reposo antes de que se aplique el impulso unitario se tiene

$$x = \dot{x} = 0 \quad \text{para } t < 0$$

$$f = 1 = \Delta p = m(0) - m\dot{x}_0$$

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{m}$$

Por lo tanto las condiciones iniciales en $t = 0$ dadas por

$$x(0) = x_0 = 0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = \frac{1}{m}$$

Remplazando las condiciones iniciales en la Ec. 21 se obtiene

$$x(t) = \frac{e^{-\zeta w_n t}}{m w_d} \sin w_d t$$

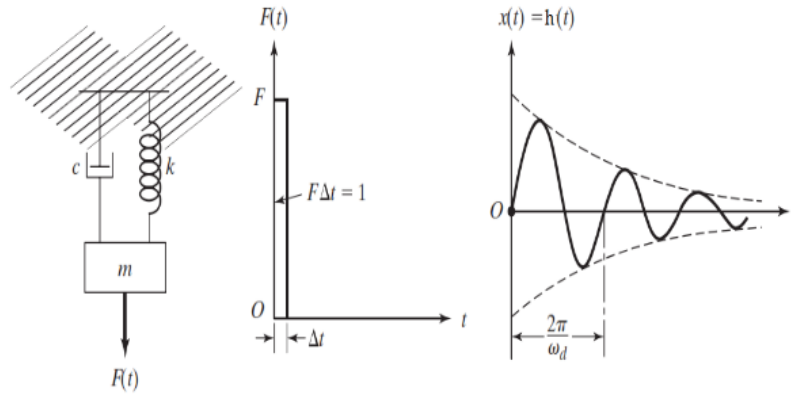
Si el impulso inicial $f = F$ entonces la ecuación anterior se puede escribir de forma que F indica el valor de la fuerza aplicada en el impulso Ec. 22 que se denomina "Respuesta

al impulso $h(t)$ y será utilizada para generar la señal de vibración. En la Fig. 8. se puede ver un esquema de

la señal de vibración que se genera al ser excitada por un impulso.

$$x(t) = h(t) = \frac{Fe^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t \quad (22)$$

Fig. 8. Sistema sub-amortiguado sometido a un impulso [5]



Modelo matemático para falla en PISTA EXTERIOR

De la Ec.22 se observa que los valores de $(m, \zeta, \omega_n, \omega_d)$ son constantes, por lo tanto se puede expresar la Ec.22 de forma más simplificada en función del tiempo Ec. 23, [4].

$$h(t) = F(t) e^{-a_d t} \sin 2\pi f_0 t \quad (23)$$

Al factor a_d se denomina factor de decaimiento o ancho de banda. Debido al giro del eje con una velocidad angular constante, las vibraciones ocurren cada vez que se genera un impulso, es decir de manera que se repite en el periodo de la frecuencia BPFO calculada en la Ec. (11).

Para generar la periodicidad de la señal se utiliza una función "Tren de Impulsos $d(t)$ " definida como se muestra a continuación [13]

$$d(t) = D \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_{BPFO})$$

Donde D es el valor de la amplitud que y es igual a 1, k representa el orden de repetición de la señal. Entonces para una falla en la pista exterior el modelo matemático se expresa como:

$$s(t) = h(t) * d(t)$$

$s(t)$ Es una función que se origina de la convolución de las funciones $h(t)$ y $d(t)$ que permite obtener el gráfico amplitud versus tiempo. Una vez

obtenida la función $s(t)$ se utiliza la una aproximación de la transformada de Fourier para tiempo discreto en Matlab para obtener el espectro de frecuencia.

Señal de vibración con falla en pista exterior simulada computacionalmente

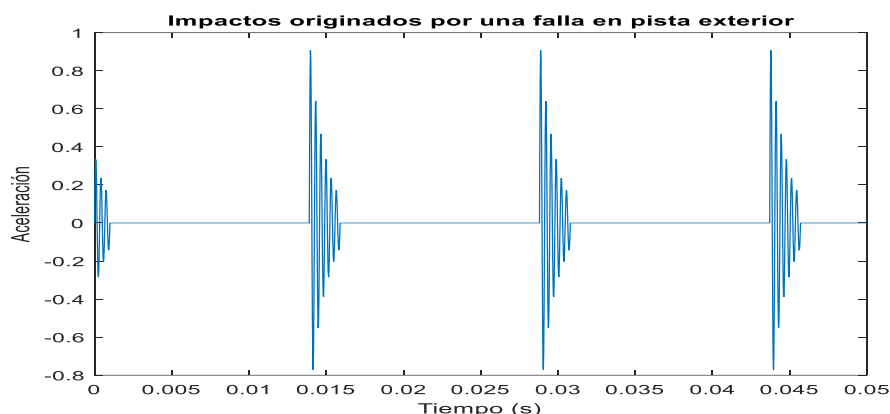
Ahora con la ayuda de Matlab se procede a graficar la señal de vibración que presenta un rodamiento 61920 con falla en la pista exterior, cada impacto de una bola en el anillo provoca una vibración de 3kHz que dura 5×10^{-3} segundos luego de lo cual cesa, el eje que conduce el rodamiento gira a una velocidad angular constante de

1200 RPM y se usa un acelerómetro que muestrea las señales a 20kHz. El rodamiento es de una hilera de bolas de contacto angular $\alpha = 15^\circ$, tiene 8 bolas de diámetro 0.02 m, el diámetro de paso del rodamiento es de 0.12 m. Se realiza el análisis en 20s de monitoreo de vibración del sistema.

Se asume $ad = 1000$ factor de decaimiento del sistema y $F = 3$ que es la fuerza del impulso aplicado, para facilitar la visualización.

En la Fig. 9. se muestra el gráfico de amplitud que puede estar en [Gs] versus tiempo en [s] mostrado para un intervalo de $[0 ; 0.05]$ s.

Fig. 9. Señal vibratoria de rodamiento con falla en pista exterior (Amplitud – Tiempo)

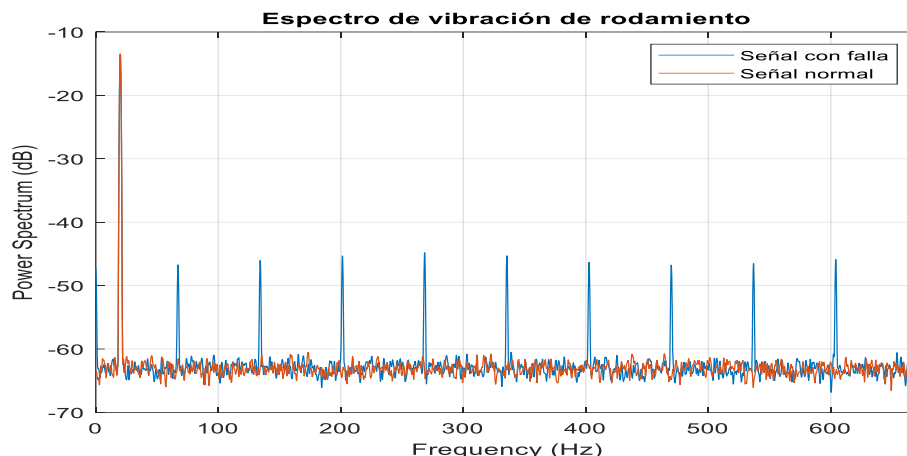


En la Fig.10 se grafica el espectro total de frecuencias incluida la frecuencia 1x (señal naranja) que representa la vibración que produce el eje. La amplitud se muestra en una

escala logarítmica en dB (decibelios) que presenta el rango aproximado que cubren las todas amplitudes. Para obtener el valor de amplitud en escala lineal se debe considerar que

$1G = 120 \text{ dB}$ y hacer la correspondiente regla de tres.

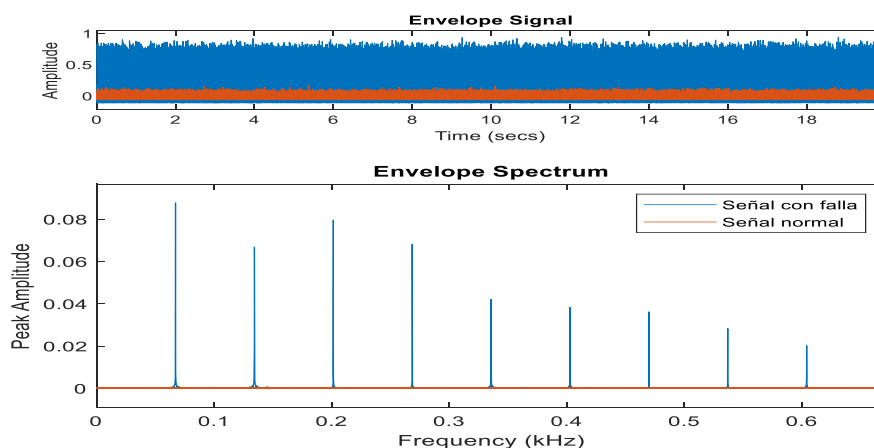
Fig.10. Señal vibratoria total de rodamiento con falla en pista exterior (Amplitud – Frecuencia)



En la Fig. 11 se muestran en la parte superior la señal de amplitud versus tiempo para todo el periodo de estudio y en el gráfico inferior la amplitud versus frecuencia utilizando un filtro que permite ver la frecuencia

BPFO y sus armónicos, lo cual permite en la práctica verificar que tipo de fallo presenta el rodamiento. La gráfica permite observar en tono azul la frecuencia BPFO y sus nueve primeros armónicos.

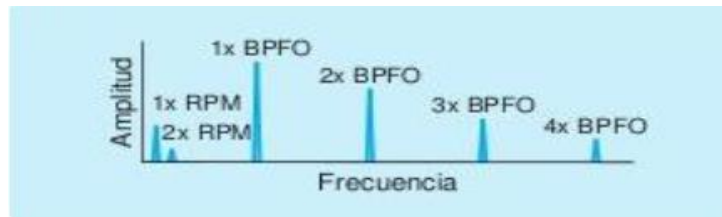
Fig. 11. Señal vibratoria de rodamiento con falla en pista exterior (Amplitud – Frecuencia)



La Fig. 12 muestra el aspecto típico de la vibración de un rodamiento con falla en la pista exterior y es como se vería de forma aproximada en un

equipo de monitoreo. Esta gráfica es aproximada y podría cambiar dependiendo del grado de daño del rodamiento.

Fig. 12. Espectro típico en rodamiento con defecto en la pista exterior [6]

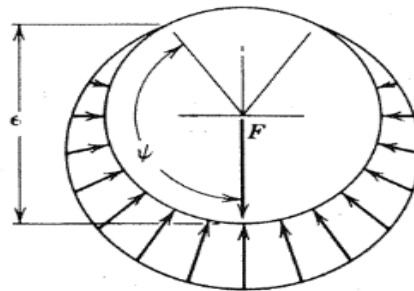


Modelo matemático de vibración con falla en PISTA INTERIOR

Para modelar la vibración del rodamiento con falla en la pista interior se considera que la misma está en movimiento (caso contrario a la pista exterior que se encuentra por lo general en ajuste y no se mueve) lo que hará que el impulso cambie debido al cambio en la dirección de

la carga variando la amplitud hasta alcanzar un valor máximo con frecuencia igual al giro del eje. Fig. 13, para esto se utiliza la función de [3] que relaciona la ubicación del defecto y la dirección de la carga, al existir un desplazamiento angular entre la ubicación de la carga y la falla mientras que gira el rodamiento, esto hará que varíe la amplitud del pulso en el tiempo.

Fig.13. Variación de la carga según la posición en pista interior [3]



$$B(t) = \left(1 - \frac{1}{2\epsilon} (1 - \cos(\psi))\right)^\alpha$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2\epsilon} (1 - \cos(2\pi f t))\right)^\alpha$$

Donde ϵ indica el porcentaje de carga al que está sometido el rodamiento en dicha posición siendo $\epsilon = 1$ la máxima carga y $\epsilon = 0$ la mínima carga, α depende del tipo de rodamiento que se esté analizando

toma valores de $\alpha = 1.5$ para rodamientos de bolas y $\alpha = 0.9$ para rodamientos de rodillos [4].

La función $B(t)$ se multiplica por la Ec. 23 y con el resultado obtenido del producto de estas dos funciones se hace la convolución con la función tren de impulsos.

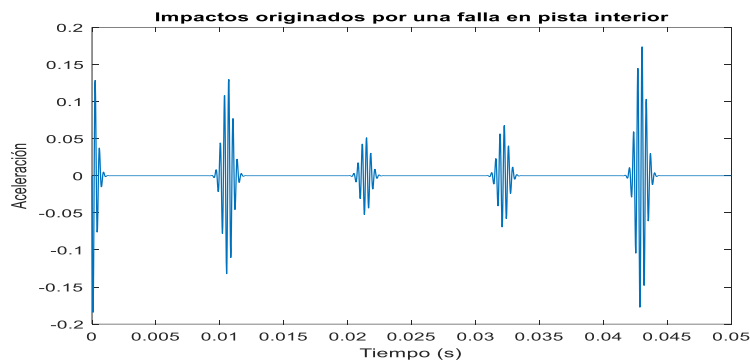
$$s(t) = [B(t).h(t)] * d(t)$$

Esta señal $s(t)$ debe ser modelada utilizando para ello la frecuencia BPFI, (Ec. 12).

Señal de vibración con falla en pista interior
 simulada computacionalmente

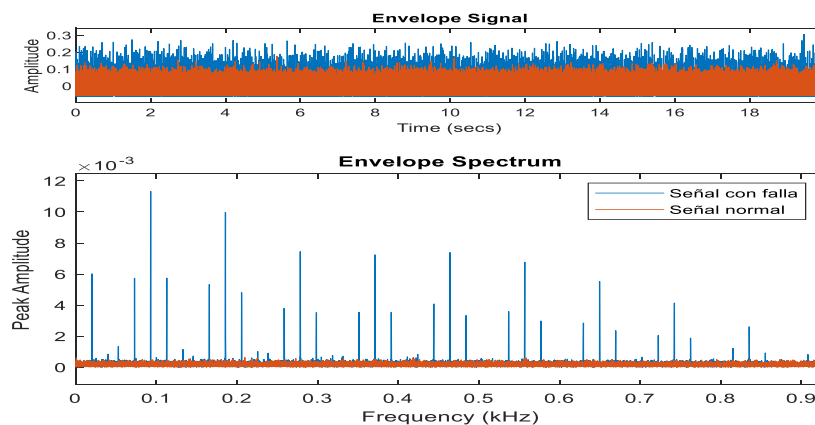
Para generar los gráficos de la señal de vibración se usan los datos de monitoreo asumidas, $a_d = 1000$, $\epsilon = 0.4$ para facilitar ver la imagen. La Fig.14 muestra la señal de amplitud versus tiempo para una falla en la pista interior, donde se ve la variación en el valor de la amplitud del impulso.

Fig. 14. Señal vibratoria de rodamiento con falla en pista interior (Amplitud – Tiempo)



El espectro para la señal de fallo en pista interior se muestra en la Fig. 15

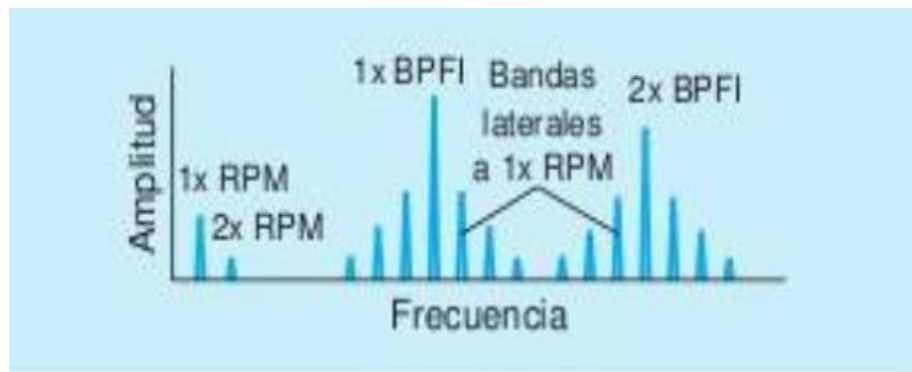
Fig. 15. Señal vibratoria de rodamiento con falla en pista interior (Amplitud – Frecuencia)



Las fallas en pista interior suelen presentar picos armónicos de la frecuencia BPFI (normalmente entre 8 y 10 armónicos de la BPFI)

modulados por bandas laterales a la frecuencia $1x$, un espectro característico se muestra en la Fig. 16, [6].

Fig. 16. Espectro típico en rodamiento con defecto en la pista interior [6]



Modelo matemático de vibración con falla en UNA BOLA

Cuando existe una falla en una bola en un instante determinado esta choca contra la pista externa y posteriormente choca en la pista interna, para simular esta condición se utiliza un factor adicional $(-1)^l$ el cual se multiplica por la expresión obtenida para la falla en la pista interior [4].

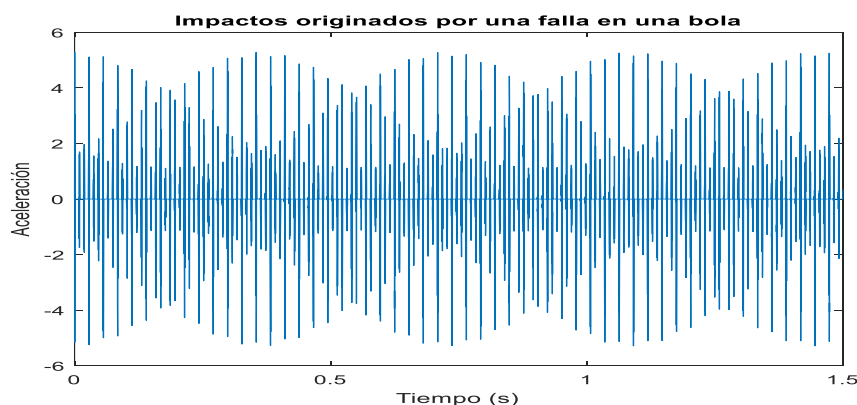
$$s(t) = \left[\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \cdot B(t) \cdot h(t) \right] * d(t)$$

l va desde cero hasta la longitud del tiempo de monitoreo (20 segundos) en pasos del periodo de monitoreo del equipo. La señal $s(t)$ debe ser modelada considerando que $F(t)$ es de amplitud máxima a_0 y frecuencia igual a dos veces BSF modulada con la frecuencia de giro FTF.

Señal de vibración con falla en una bola simulada computacionalmente

En la Fig. 17 se muestra la señal de vibración (Amplitud versus frecuencia) que se logra utilizando los datos asumidos.

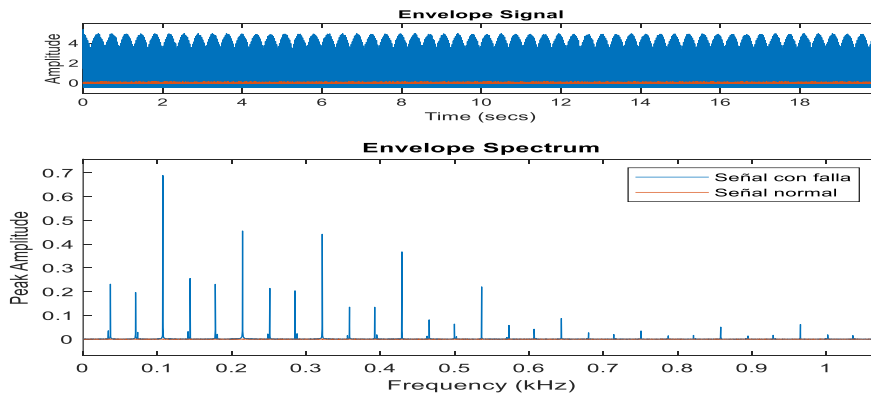
Fig.17. Señal vibratoria de rodamiento con falla en una bola (Amplitud – Tiempo)



La Fig. 18 muestra el espectro de frecuencia para falla en una bola del rodamiento aplicando un filtro que permite eliminar el ruido y visualizar la frecuencia BSF con sus armónicos

y las bandas laterales moduladas a FTF, y en la parte superior se muestra la señal amplitud versus tiempo para todo el intervalo de análisis de vibración.

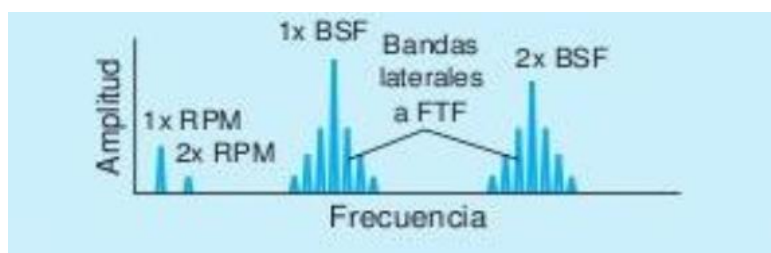
Fig.18. Señal vibratoria de rodamiento con falla en una bola (Amplitud – Frecuencia)



Los espectros que genera una falla en una bola suelen presentar picos predominantes en la frecuencia 1xBSF y 2x BSF, el pico de mayor amplitud suele tener bandas

laterales moduladas a la frecuencia FTF (Ec. 10), [6]. Un espectro característico de esta señal se puede visualizar en la Fig. 19.

Fig. 19. Espectro típico en rodamiento con defecto en una bola [6]



Modelado matemático de vibración con falla en LA JAULA

La señal de vibración de falla en la jaula se modela de forma similar a la falla en pista exterior, pero la frecuencia de repetición es la frecuencia FTF, Ec. 10, que es la que

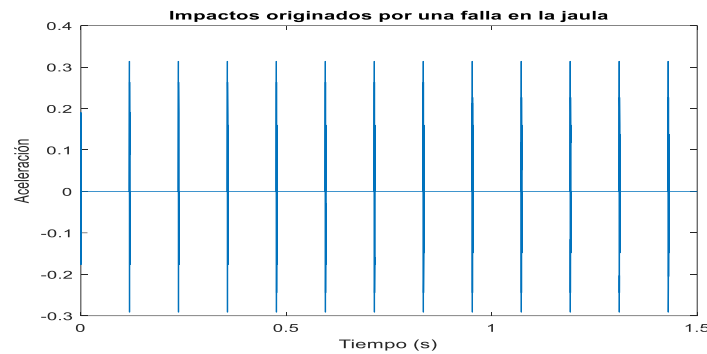
presenta un menor valor de entre todos los tonos de los rodamientos.

$$s(t) = h(t) * d(t)$$

Señal de vibración con falla en la jaula simulada computacionalmente

En la Fig. 20 se puede observar la señal amplitud versus tiempo para falla en la jaula.

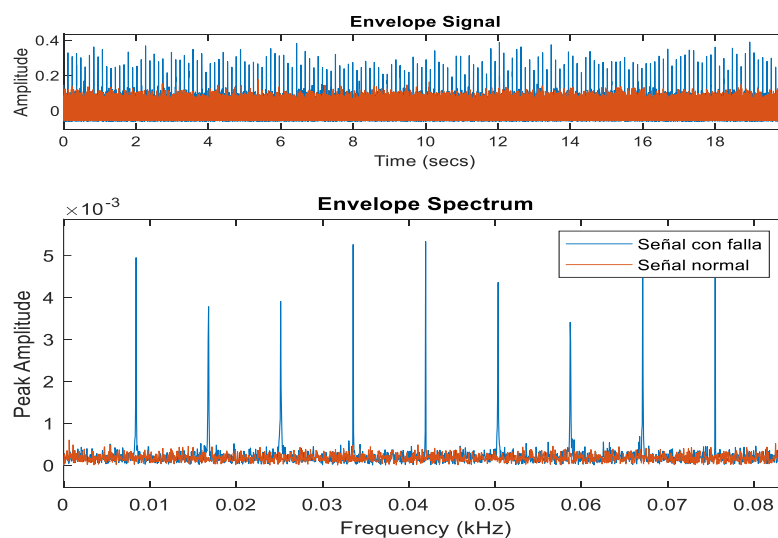
Fig. 20. Señal vibratoria de rodamiento con falla en la jaula (Amplitud – Tiempo)



El espectro de frecuencia para este tipo de fallo se muestra en la Fig. 21, en la parte superior consta la señal amplitud versus tiempo para todo el intervalo de monitoreo, es decir 20

segundos y en la parte inferior se ha aplicado un filtro que permite visualizar la señal FTF y sus armónicos.

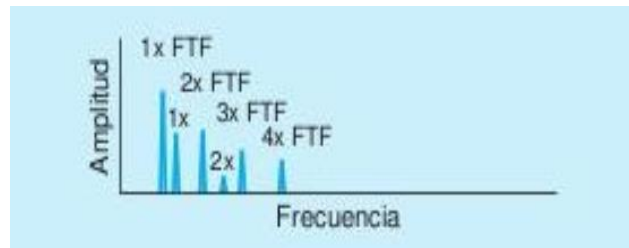
Fig. 21. Señal vibratoria de rodamiento con falla en la jaula (Amplitud – Frecuencia)



Generalmente una falla en la jaula va acompañado por defectos en pistas y FTF con sus armónicos suelen modular a estas frecuencias de deterioro de pista como sumas y/o

diferencias de frecuencias. Un espectro característico de falla en la jaula se presenta en la Figura 22, [6].

Figura 22. Espectro típico en rodamiento con defecto en la jaula [6]



3. Conclusiones

Se han desarrollado simulación matemáticos que permiten simular la vibración de un rodamiento de una hilera de bolas bajo condiciones comunes de falla. Estos modelos se basan en la teoría de mantenimiento predictivo generada hasta el momento y facilita la comprensión de la teoría y práctica ya que las variables consideradas pueden variar para facilitar la comprensión.

Los modelos pueden ser usados con diferentes tamaños y condiciones de operación, logrando tener una buena aproximación a lo que se esperaría obtener en la pantalla de un equipo de monitoreo.

Según el tipo de falla y las condiciones de operación se debe prever en qué lugar del espectro aparecen los picos y posiblemente se debe ajustar la resolución de los gráficos.

Se pueden considerar fallas comunes a picaduras que se presentan en el material de las pistas, bolas y jaula. Estas picaduras provocan golpes entre componentes a manera de impulsos que aparecen y desaparecen de forma periódica dependiendo del lugar donde se encuentre la picadura.

Los modelos propuestos son válidos cuando se tiene una falla puntual, es decir una picadura localizada y dejan de tener validez cuando las fallas aumentan en dimensión y en cantidad, ya que la señal de excitación dejaría de comportarse como un impulso.

Cada tipo de falla tiene un espectro característico que se forma de la composición de algunas señales como son la frecuencia fundamental (1x) y sus armónicos, las frecuencias de falla o tonos de rodamiento también con sus armónicos y el ruido inherente del equipo.

Para desarrollo de trabajos a futuro de plantea la comprobación física mediante la construcción de un módulo de pruebas de rodamientos.

También se deben desarrollar modelos que permitan simular la vibración de otro tipo de rodamientos que consideren cargas axiales.

Desarrollar modelos matemáticos que permitan visualizar la fallas de los rodamientos con algunas condiciones como picaduras.

Bibliografía

- [1] SKF. (2015). "Catálogo General SKF (PUB BU/P1 10000/2 ES.)".
- [2] White, G. (2010). "Introducción al análisis de vibraciones".
- [3] Harris, T. (2001). "Rolling Bearing Analysis (4d ed.)".
- [4] Ericsson, Stefan., Grip, N., Johanson, E., Persson, E., (2001). "Automatic Detection of Local Bearing Defects in Rotating Machines (Part I)".
- [5] Rao, S. (2012). "Vibraciones Mecánicas (5ª ed.)."
- [6] Navarro Carmona, M., (2016). "Diagnóstico de fallos en rodamientos. (Trabajo de fin de carrera). Universidad de Sevilla, Sevilla.