DOI: https://doi.org/10.46296/ig.v7i13.0164

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA PARA OBTENER EL RENDIMIENTO VOLUMÉTRICO DE UNA BOMBA DE PALETAS COMPENSADA A PARTIR DE LAS CARACTERÍSTICAS PROPORCIONADAS POR EL FABRICANTE

MATHEMATICAL MODELING TO OBTAIN THE VOLUMETRIC PERFORMANCE OF A COMPENSATED VANE PUMP FROM THE CHARACTERISTICS PROVIDED BY THE MANUFACTURER

Guerrero-Ferrusola Oscar Xavier [1]; Rivera-Obando Raúl Arnaldo [2];
Burbano-Daquilema Christian Iván [3]

[1] Instituto Técnico Superior Simón Bolívar. Guayaquil, Ecuador.
Correo: o_guerrero@istsb.edu.ec. ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-0149-0833

[2] Instituto Técnico Superior Simón Bolívar. Guayaquil, Ecuador.
Correo: ra_rivera@istsb.edu.ec. ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-3448-2522.

[3] Instituto Técnico Superior Simón Bolívar. Guayaquil, Ecuador.
Correo: c_burbano@istsb.edu.ec. ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-3550-4252.

Resumen

Sobre bombas hidráulicas se define el rendimiento volumétrico como la relación entre el caudal real de líquido a mover con respecto al caudal teórico que debiera mover en función de las dimensiones del equipo. Para el caso de bombas rotativas de paletas, este rendimiento se da por la falta de llenado de las cavidades internas debido a factores como velocidad de giro, juegos entre las partes móviles, inercia y viscosidad del líquido, forma y dimensión de la entrada del líquido a las cavidades de la bomba. Este trabajo da una metodología para determinar el rendimiento volumétrico a través de una ecuación obtenida con los datos de caudal que el fabricante provee en catálogos de funcionamiento, se linealiza las gráficas de caudal versus presión encontrando una fórmula general para obtener el rendimiento volumétrico de un modelo de bomba, ecuación con dos variables que son la presión de trabajo y la frecuencia de giro. Los resultados muestran que el error relativo de los resultados no supera el 3% lo que hace utilizable el procedimiento para cualquier grupo de datos obtenidos de los catálogos informativos de fabricantes de bombas de paletas.

Palabras clave: hidráulica, bomba de paletas, rendimiento volumétrico.

Abstract

About hydraulic pumps, volumetric performance is defined as the relationship between the actual flow rate of liquid to be moved with respect to the theoretical flow rate that should be moved based on the dimensions of the equipment. In the case of rotary vane pumps, this performance is due to the lack of filling of the internal cavities due to factors such as rotational speed, play between the moving parts, inertia and viscosity of the liquid, shape and dimension of the liquid inlet. to the pump cavities. This work provides a methodology to determine the volumetric performance through an equation obtained with the flow data that the manufacturer provides in operating catalogs, the flow versus pressure graphs is linearized, finding a general formula to obtain the volumetric performance of a model. of pump, equation with two variables that are the working pressure and the rotation frequency. The results show that the relative error of the results does not exceed 3%, which makes the procedure usable for any group of data obtained from the information catalogs of vane pump manufacturers.

Keywords: hydraulics, vane pump, volumetric performance.

Información del manuscrito:
Fecha de recepción: 18 de octubre de 2023.
Fecha de aceptación: 19 de diciembre de 2023.
Fecha de publicación: 10 de enero de 2024.

1. Introducción

Para efectuar el análisis de circuitos hidráulicos de fuerza es necesario conocer los parámetros característicos de los elementos que forman el circuito, dando principal atención al actuador hidráulico, sea lineal o rotativo, y al elemento que mueve el fluido como es la bomba hidráulica. En el caso de la bomba hidráulica es casi una norma que sean del tipo de desplazamiento positivo y conocer características de rendimiento volumétrico y rendimiento mecánico es necesario para determinar parámetros como caudal entregado a cierta presión de trabajo, torque y potencia hidráulica. Los fabricantes de bombas dan a conocer las características de caudal en función de la presión de trabajo y de frecuencia de rotación, sea en forma tabulada o en gráficas, pero dentro del rango mínimo y máximo de operación solo se da información de 4 o 5 valores de frecuencia de giro (r.p.m.) de toda la gama posible siendo algo difícil ubicar valores con otras frecuencias de giro fuera de las mostradas. Se pretende utilizar herramientas matemáticas con el fin de conseguir una expresión en forma de ecuación con los datos del fabricante para obtener el rendimiento volumétrico de una bomba hidráulica a cualquier presión de trabajo y frecuencia de giro.

1.1 Objetivo

Determinar una ecuación que permita obtener el rendimiento volumétrico de una bomba hidráulica tipo paletas compensada en función de la presión de trabajo y de la frecuencia de rotación usando como base los datos de funcionamiento del fabricante a fin de conseguir caudales reales en aplicaciones de circuitos hidráulicos de fuerza.

1.2 Objetivos específicos

- Desarrollar expresiones en forma de ecuación para determinar la capacidad o volumen desplazado por revolución de una bomba de paleta no compensada y de una bomba compensada.
- Desarrollar con un modelo específico de bomba de paleta compensada la tendencia lineal de las curvas caudal versus presión con la frecuencia de rotación que el fabricante provea de catálogo.
- Realizar la modelización de la expresión matemática de la cual se obtenga el rendimiento

volumétrico de la bomba de paleta compensada en función de la presión de trabajo y la frecuencia de giro de la bomba.

- Realizar una tabla comparativa de valores utilizando los valores obtenidos del modelado con los calculados a partir de los datos del diagrama del fabricante.
- Utilizar la ecuación del modelo matemático en una aplicación de circuito hidráulico activando un actuador lineal (cilindro).

1.3 Desarrollo del arte

La bomba de paletas, son del grupo llamado de desplazamiento positivo o volumétrica, tiene un rotor que gira de forma excéntrica en un estátor circular o elíptico. En el rotor de la bomba de paletas deslizantes se han mecanizado unas ranuras por las que se mueven de forma radial las paletas para formar, con la pared interna del estátor y las laterales, la cámara de bombeo. Las paletas se mantienen en contacto con el estátor mediante el efecto de la propia fuerza centrífuga, pero en algunos modelos se utilizan muelles para ayudar a mantener el contacto de las paletas (Salvador de las Heras, 2011).

Una de las aplicaciones frecuente de las bombas de paletas es el mercado de la transmisión y la dirección automotriz. Las cuotas de mercado de los diferentes tipos de transmisiones están cambiando en todo el mundo. Además, los sistemas de propulsión electrificados están ganando una cuota de mercado cada vez mayor. Esto conduce a requisitos cambiantes para los respectivos suministros hidráulicos. Estos accesorios influyen significativamente en el consumo de combustible o la autonomía de los vehículos eléctricos. Por lo tanto, se vuelve cada vez más importante una mayor eficiencia global y, en consecuencia, una mayor eficiencia volumétrica de la bomba (Lobsinger y otros, 2020/1).

A nivel comparativo indicamos la investigación realizada en bombas de engranajes por parte de la Universidad Agraria de la Habana (UNAH), centro de Mecanización (CEMA) dirigidas al desarrollo de la Oleohidráulica en la que sometieron a evaluación dos bombas de engranajes de dientes externos de la marca Caproni de procedencia búlgara, con cilindradas de 32

cm3/rev y 50 cm3/rev refiriéndose la prueba a estas bombas en específico se encontró una eficiencia volumétrica de 94,4 % para la bomba de 32 cm3/rev y de 93,9% para la de 50 cm3/rev ambas girando a una frecuencia de rotación de 1 500 rpm y con una presión de 150 bar, lo cual tenemos una referencia de este tipos de bombas (Paneque Rondón y otros, 2013).

Otro estudio analiza teóricamente una bomba de paletas utilizando el software AMESim y MATLAB/Simulink, para estimar las fuerzas de fricción y la pérdida de eficiencia volumétrica sin necesidad de pruebas experimentales arduas, el resultado encontrado es la confirmación de que la eficiencia volumétrica depende de la presión de entrega y de la velocidad angular; la tasa de fuga es proporcional a la presión de entrega y aproximadamente independiente de la velocidad angular, mientras que el caudal ideal es proporcional a la velocidad angular (Fornarelli y otros, 2018).

El uso de programas computacionales en el estudio de fluidos como el Computational Fluid Dynamics (CFD) permite obtener simulaciones del caudal variando la forma, la orientación y el movimiento de las cámaras, así también se puede colocar una distribución no uniforme de la fase gaseosa debido a la liberación de aire disuelto en el fluido hidráulico. En el artículo Simulation of the Filling Capability in Vane Pumps, se encontró que una bomba con una relación baja entre el espesor axial y el diámetro tiene una mayor eficiencia volumétrica si las cámaras se alimentan desde un solo lado. Se encontraron comportamientos opuestos en el caso de bombas con diámetros pequeños y espesores elevados. Además, el llenado podría mejorarse aumentando el número de cámaras y reduciendo el diámetro del rotor, incluso sólo localmente (Rundo y otros, 2019).

En un trabajo sobre simulación para predecir el rendimiento de una bomba de desplazamiento positivo tipo paletas con desplazamiento variable (VDVP) y con el software AMESim se estudia el efecto de las fugas sobre la eficiencia volumétrica, las fugas externas son menores que las internas y cuanto mayor es la temperatura, mayor es la fuga haciendo referencia a que las fugas

externas son las que se presentan entre la parte lateral de las paletas y el estator y las internas entre la parte superior de la paleta y la circunferencia del estator, llegando a concluir que el reducir las fugas internas aumentan la eficiencia volumétrica (He y otros, 2020).

En los últimos años el creciente impacto de la mejora tecnológica de materiales y procesos ha hecho que se revisen métodos de diseño para mejorar la eficiencia de bombas de paletas pequeñas accionadas por motor eléctrico para un vehículo convencional. Uno de los objetivos es disminuir el par de fricción sin disminuir la eficiencia volumétrica. Hay dos factores relacionados con el par de fricción a saber dimensiones de las partes de la bomba como son anillo de leva, rotor y paletas y el coeficiente de fricción entre el contorno de la leva y la punta de la paleta, por tanto los diseños de estos elementos junto con un estudio de la afectación de la temperatura del aceite conseguirían mejoras en la eficiencia mecánica, sin afectar el rendimiento volumétrico de la bomba (Inaguma & Yoshida, 2015).

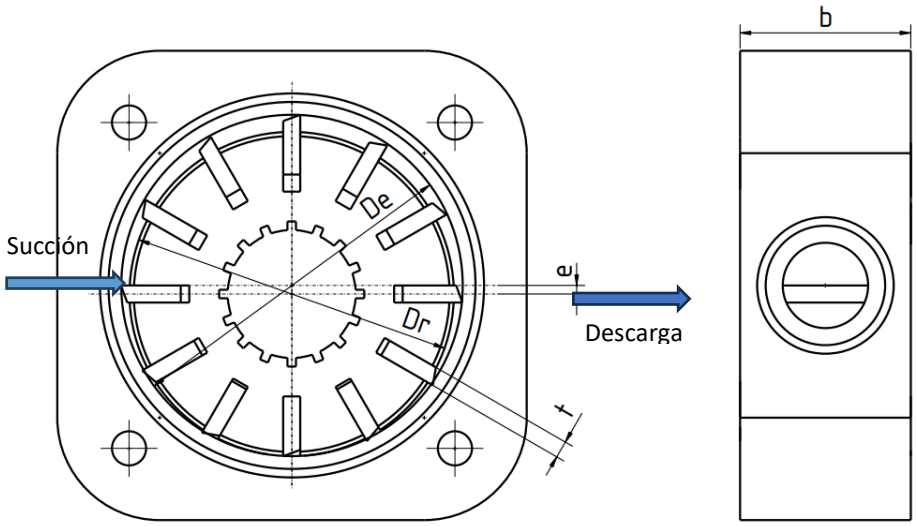
1.4 Fundamentos tecnológicos.

1.4.1 Determinación aproximada del caudal teórico en bombas de paletas no balanceadas (con rotor excéntrico).

La bomba de paletas desequilibrada (no compensada) tiene una excentricidad entre la carcasa (estator) y el elemento móvil (rotor), lo que genera que en la zona de descarga del fluido la presión genere una fuerza que no está equilibrada y somete al eje y sus rodamientos a fuerzas que deben ser considerados para el correcto dimensionamiento de estos elementos (Mott, 2015).

La figura 1 muestra de forma simplificada una bomba de paletas no equilibrada que consta de un estator con un orificio interior de diámetro De en el cual se encuentra el rotor, de diámetro Dr que presenta varias ranuras en las que se alojan las paletas móviles, de espesor t, el centro del orificio del estator y el del rotor tiene una excentricidad e, que propicia el traslado de fluido de la zona de succión hacia la zona de descarga, el rotor tiene un grosor b.

Figura 1. *Bomba de paletas no compensada (desequilibrada).*



Asumiendo que tanto el orificio interior del estator y el rotor están en el mismo centro, el área entre el estator y el rotor que lleva el fluido se determina por la resta entre el área circular mayor (orificio del estator) y el área circular menor (rotor), expresándolo de la siguiente forma:

$$A = \frac{\pi}{4}\left(D_e^2 - D_r^2\right) - nte \qquad (0.1)$$

Siendo:

D_e : Diámetro del estator

D_r : Diámetro del rotor

n : número de paletas

t : espesor de paletas

e : excentricidad, espacio entre los diámetros del estator y del rotor

Relacionando el diámetro del estator y el del rotor con el espacio entre ellos, se consigue la siguiente expresión:

$$D_e - D_r = 2e \;\rightarrow\; D_r = D_e - 2e \qquad (0.2)$$

Realizando operaciones algebraicas sobre la ec. 1.1 con la ec. 1.2, obtenemos:

$$A = \frac{\pi}{4}\left(D_e + D_r\right)\left(D_e - D_r\right) - nte$$

$$A = \frac{\pi}{4}\left(D_e + D_e - 2e\right)2e - nte$$

$$A = \frac{\pi}{4}\left(2D_e - 2e\right)2e - nte = \frac{\pi}{4}\left[4\left(D_e - e\right)e\right] - nte$$

$$A = \pi\left(D_e - e\right)e - nte$$

El área seccional de desplazamiento del fluido es:

$$A = e\left[\pi\left(D_e - e\right) - nt\right] \qquad (0.3)$$

Para determinar el volumen de líquido transportado, el área se multiplica por la longitud (grosor) del rotor, b, obteniendo la expresión:

$$C_b = eb\left[\pi\left(D_e - e\right) - nt\right] \qquad (0.4)$$

Siendo Cb la capacidad o volumen desplazado teórico de la bomba por vuelta o revolución del rotor. Si se utilizaran milímetros como unidad de medida longitudinal, entonces el volumen estaría en mm3.

Para que la capacidad por revolución se exprese en cm3/rev se dividirá para un factor de conversión de 1 000 (1 cm3 = 1 000 mm3), por tanto, la expresión quedaría:

$$C_b = \frac{eb\left[\pi\left(D_e - e\right) - nt\right]}{1\,000} \qquad (0.5)$$

Siendo:

C_b : capacidad o volumen desplazado (cm^3/rev)
e : excentricidad del rotor de la bomba en mm
b : longitud (profundidad) del rotor en mm
D_e : diámetro del estator en mm
n : número de paletas
t : espesor de las paletas en mm

Generalmente los catálogos de varios fabricantes incorporan el valor del volumen desplazado por revolución en las hojas de datos de los productos y se puede utilizar para la obtención del parámetro de caudal en función de la frecuencia de giro del rotor de la bomba (Pérez Pupo & Navarro Ojeda, 2020).

$$G_{teórico} = C_b n \qquad (0.6)$$

siendo n el rpm de giro del rotor de la bomba.

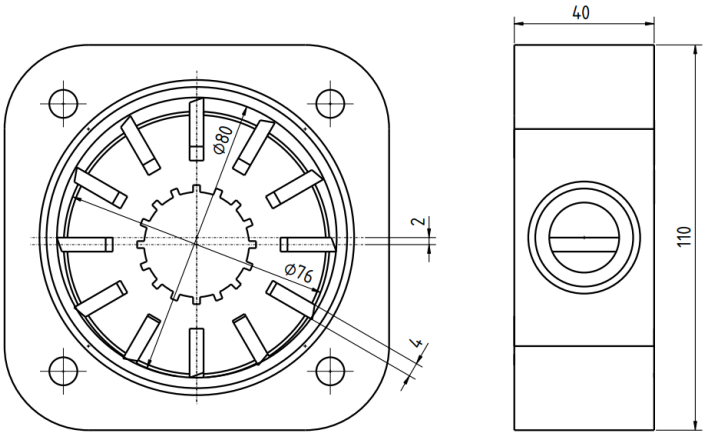
El rendimiento volumétrico se encontrará dividiendo el caudal real para el caudal teórico (Pérez Pupo & Navarro Ojeda, 2020).

$$\eta_v = \frac{G_{real}}{G_{teórico}} = \frac{G_{real}}{C_b n} \qquad (0.7)$$

Ejemplo aplicativo:

Dada las dimensiones mostradas en la figura 2 de una bomba de paletas no compensada, con una frecuencia de rotación de 1 150 rpm, estimar el caudal real si se tiene una eficiencia volumétrica del 90,0% (0,90).

Figura 2. *Dimensiones de la bomba de paleta no compensada para el ejercicio aplicativo.*



$$C_b = \frac{eb\left[\pi\left(D_e - e\right) - nt\right]}{1\,000}$$

$$C_b = \frac{2(40)\left[\pi(80-2) - 12(4)\right]}{1\,000} = 15,7635\,\frac{\text{cm}^3}{\text{rev}}$$

$$G_{real} = \eta_v C_b n = 0,9(15,7635)(1150) = 16\,315,2\,\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}\left(16,3\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right)$$

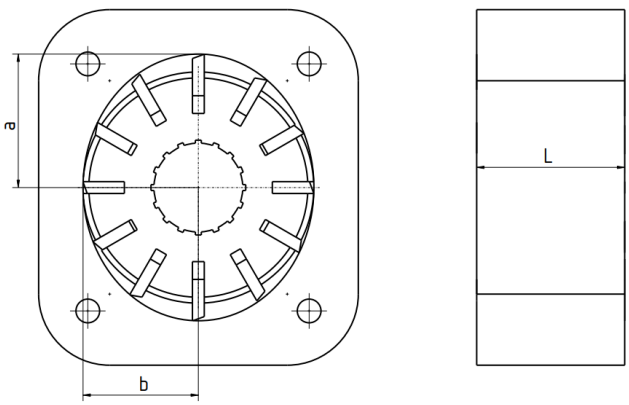
1.4.2 Determinación aproximada del caudal teórico en bombas de paletas balanceadas

La bomba de paletas balanceada o equilibrada tiene una construcción en la cual se tiene dos sectores de salida, del fluido transportado, diametralmente opuestos. Esto consigue que las fuerzas generadas a ambos lados de la bomba estén en sentido opuestos y con valores numéricos iguales que anulan la carga sobre el eje y los rodamientos del rotor, siendo de beneficio para el dimensionamiento de estos elementos (Serrano Nicolas, 2002).

Para el análisis utilizaremos la figura 3, en que se bosqueja una bomba de paletas balanceada (equilibrada) en la cual el estator tiene forma elíptica y el centro del estator y del rotor son coincidentes.

Determinaremos el área entre el rotor y el estator que lleva el fluido desde la zona de succión hacia la zona de descarga, restando el área del orificio elíptico del estator y el área circular del rotor. Para simplificar el desarrollo de la ecuación se despreciará el área transversal de las paletas, por tanto la expresión del área seccional de transporte del fluido.

Figura 3. *Bomba de paletas compensada (equilibrada)*



El área de una elipse se obtiene multiplicando el número pi (π) por la longitud el semieje mayor por el semieje menor:

$$A_{elipse} = \pi ab \qquad (0.8)$$

El rotor es circular por tanto su área será $A_c = \pi b^2$ (0.9)

siendo b el radio del rotor y el semieje menor de la elipse.

Entonces el área que transporta el fluido será:

$$A = A_{elipse} - A_c = \pi ab - \pi b^2 = \pi b\left(a - b\right) \qquad (0.10)$$

El largo del rotor le asignamos la variable L por tanto el volumen teórico de líquido que se impulsa por revolución será

$$C_b = \pi b\left(a - b\right)L \qquad (0.11)$$

Generalmente los catálogos de varios fabricantes incorporan el valor del volumen desplazado por revolución en las hojas de datos de sus productos y se puede utilizar para la obtención del parámetro de caudal en función de la frecuencia de giro del rotor de la bomba, como en la ec. 1.6

El caudal real de la bomba se maneja como un rendimiento, que conoce como volumétrico, y que se multiplica al caudal teórico, como en la ec. 1.7:

$$G_{real} = \eta_v G_{teórico} = \eta_v C_b n \qquad (0.12)$$

La determinación del rendimiento volumétrico se puede realizar por pruebas reales de laboratorio realizadas al hacer funcionar la bomba a diferentes frecuencias de giro y con diferentes presiones de entrega del fluido, registrando sus respectivos caudales. Esto genera una serie de datos que pueden ser representados en forma de tablas o gráficas por los fabricantes de bombas.

2. Metodología

A partir de la hoja de datos del fabricante de la bomba hidráulica de paleta se presentan curvas de caudal versus presión de trabajo a diferentes frecuencias de giro, de estas se puede obtener una ecuación que nos permita estimar el rendimiento volumétrico para la simulación de una bomba hidráulica de paletas específica en una aplicación de trabajo específica.

Para el presente trabajo se utiliza la información de catálogo del

fabricante de bombas hidráulicas B&C Hydraulics, que tiene gráficas de curvas de funcionamiento para los modelos HQ02 de bombas de paletas de desplazamiento balanceadas y con caudal fijo. Este modelo de bomba se distribuye con diferentes cartuchos que permiten cubrir un amplio rango de caudales; el cartucho de la serie A02 permite un rango de caudales que van de 46,9 L/min (12 gpm) a 79,0 L/min (21 gpm) (B&C HYDRAULICS, 2015).

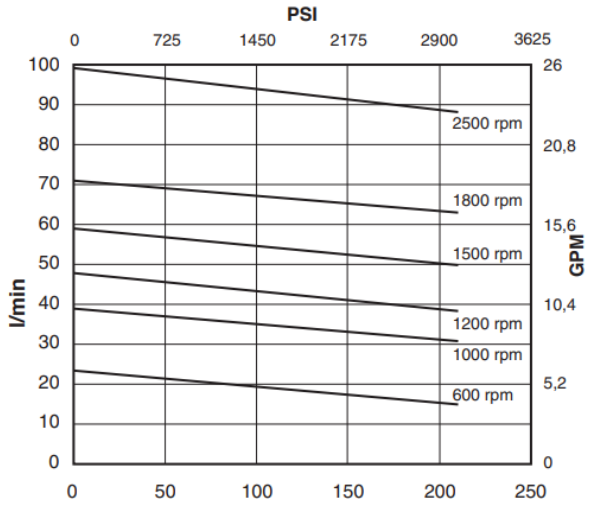
Se hace un resumen de los diferentes modelos de bomba de paleta A02 en la tabla 1 con las características técnicas del modelo.

Tabla 1. *Características técnicas de bombas de paletas modelo HQ – A02*

Modelo del cartucho	Desplazamiento geométrico		Caudal a 1200 rpm @ 7 bar		Caudal a 1500 rpm @ 7 bar		Presión máxima		Rango de r.p.m	
	cm^3/giro	in^3/rev	**L/min**	gpm	**L/min**	gpm	**bar**	psig	**mín**	**máx**
A02-12	40,1	2.54	46,9	12	58,8	15.5	210	3 050	600	2 700
A02-14	45,4	2.77	52,7	14	65,7	17.4	210	3 050	600	2 700
A02-17	55,2	3.37	64,2	17	80,2	21.2	210	3 050	600	2 700
A02-19	60,0	3.66	71,0	19	88,7	23.4	210	30 50	600	2 500
A02-21	67,5	4.12	79,0	21	99,8	26.4	210	3 050	600	2 500

De la hoja técnica del fabricante se obtiene gráficas de la bomba A02-12 con la variación del caudal en función de la presión de descarga y de la frecuencia de giro o rpm, en la figura 4 se muestra la gráfica de caudal para el modelo antes mencionado.

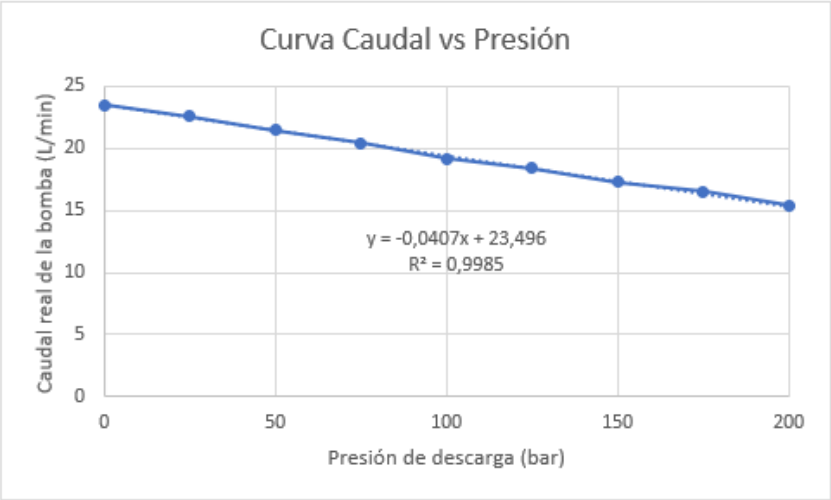
Figura 4: *Gráfica de caudal versus presión para varias frecuencias de rotación, bomba hidráulica HQ-A02-12 (B&C HYDRAULICS, 2015)*



A continuación, desarrollamos ecuaciones a partir de los datos de la curva caudal vs presión del catálogo del fabricante, que nos permita relacionar el caudal de la bomba con la presión de trabajo y su frecuencia de giro. Para ello se han graficado los datos solo para cuando la bomba gira a 600 r.p.m. y se calcula la línea de tendencia lineal cuyo valor del coeficiente de determinación R2, el cual debe ser superior a 0,95 para que se considere satisfactorio (Gutiérrez Pulido & De la Vara Salazar, 2012).

Tabla 2. *Tabla de datos y gráfica de Caudal vs Presión de la bomba A02-12 de la marca B&C Hydraulic con frecuencia de giro a 600 rpm.*

Presión	Caudal
bar	L/min
0	23,5
25	22,6
50	21,5
75	20,4
100	19,2
125	18,4
150	17,3
175	16,5
200	15,4



La ecuación sería: $G_{real} = -0,0407\,p + 23,496$ a 600 rpm (0.13)

Realizando el mismo procedimiento para las líneas a otras frecuencias de giro (rpm), se obtienen las siguientes ecuaciones:

a 1 000 rpm: $G_{real} = -0,0392\,p + 38,876$ (0.14)

a 1 200 rpm: $G_{real} = -0,0458\,p + 47,677$ (0.15)

a 1 500 rpm; $G_{real} = -0,0441\,p + 58,756$ (0.16)

a 1 800 rpm : $G_{real} = -0,0384\,p + 70,656$ (0.17)

a 2 500 rpm: $G_{real} = -0,053\,p + 98,691$ (0.18)

Las ecuaciones muestran que todas las líneas de las gráficas no presentan la misma pendiente en las diferentes frecuencias de rotación, por tanto se propone trabajar con una ecuación que tenga una pendiente que es el promedio de los valores calculados de las gráficas del fabricante, como en la tabla 3.

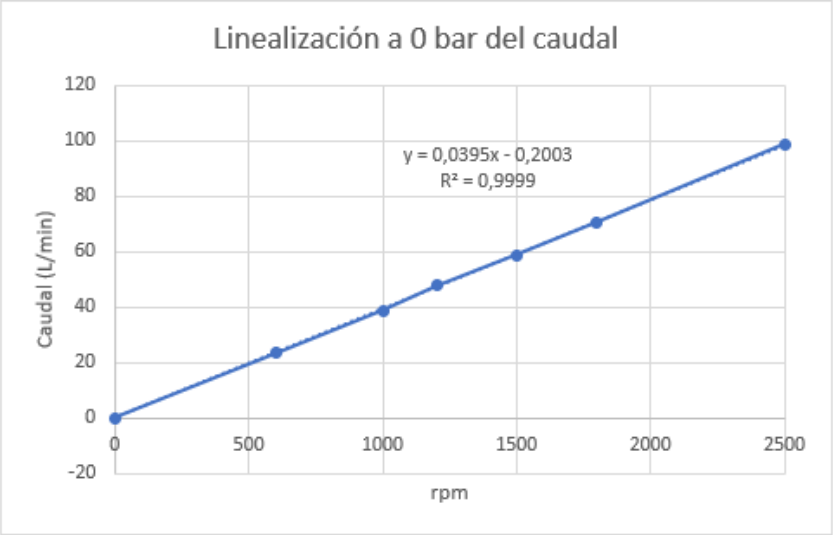
Tabla 3. *Promedio de las pendientes de las ecuaciones lineales 1.13 a 1.18*

rpm	pendientes
600	-0,0407
1000	-0,0392
1200	-0,0458
1500	-0,0441
1800	-0,0384
2500	-0,053
Promedio	**-0,04353**

La tabla 4 muestra los datos tabulados de caudal a presión 0 bar y la gráfica que determina la expresión matemática para el caudal a diferentes frecuencias de rotación.

Tabla 4. *Caudal de la bomba A02-12 a diferentes revoluciones por minuto a presión 0 bar.*

rpm	Caudal a 0 bar
0	0
600	23,5
1000	38,8
1200	47,7
1500	58,8
1800	70,8
2500	98,8



Se obtiene la ecuación $G = 0,0395n - 0,2003$ (0.19)

La ecuación 1.19 linealiza el valor del caudal con una presión de 0 bar en el intervalo de frecuencias de giro entre 600 y 2 500 rpm.

Ahora sumando la ec 1,19 con la pendiente promedio por la presión, se obtiene una ecuación linealizada con dos variables que nos permitiría encontrar el caudal de la bomba en función de la presión de trabajo y los rpm de giro de la siguiente forma:

$$G = -0,0435p + 0,0395n - 0,2003 \quad (0.20)$$

Siendo:

G caudal de la bomba en L/min

p presión manométrica de descarga en bar

n revoluciones por minuto de giro del eje de la bomba de paletas

Para obtener el rendimiento volumétrico de la bomba se divide el caudal real para el caudal teórico calculado a través de las dimensiones físicas de la bomba, que es un dato entregado por el fabricante como volumen de desplazamiento por revolución, Cb, que para el modelo analizado es de 40,1 cm3/rev (0,0401 L/rev).

Entonces:

$$\eta_v = \frac{G_{real}}{G_{teórico}} = \frac{-0,0435p + 0,0395n - 0,2003}{C_b n} = \frac{-0,0435p + 0,0395n - 0,2003}{0,0401n}$$

Si realizamos la división a cada término del numerador, obtendremos la ecuación del rendimiento volumétrico con dos variables, presión y frecuencia de giro:

$$\eta_v = 0,985 - \frac{4,995 + 1,1085p}{n} \quad (0.21)$$

Siendo:

η_v: rendimiento volumétrico de la bomba

p: presión de trabajo en bar

n: frecuencia de giro en revoluciones por minuto (rpm)

3. Resultados y discusión

A continuación, se elabora una tabla comparativa con los valores de rendimiento volumétrico obtenidos del cálculo directo con los diagramas de caudal versus presión del fabricante con los valores obtenidos por la fórmula de modelización propuesta en el desarrollo del presente trabajo. Para hacer una comparación utilizamos la definición del error relativo aplicado a mediciones que es calcular el error absoluto y dividirlo para el valor convencional verdadero y lo llevamos a un porcentaje multiplicando por 100 (González González & Zeleny Vásquez, 1995).

Para ello hemos colocado los cálculos realizados a una presión de entrega del fluido hidráulico de 100 bares y variamos las frecuencias de rotación en valores como los que grafica el fabricante de 600, 1000, 1200, 1500, 1800 y 2 500 rpm; luego calculamos el valor del error relativo en porcentaje con la expresión:

$$\%\text{error relativo} = \left| \frac{G_{grafico} - G_{\text{mod}elo}}{G_{grafico}} \right| \times 100 \quad (0.22)$$

siendo:

$G_{grafico}$: caudal obtenido del diagrama del fabricante en L/min

G_{modelo}: caudal obtenido de la ecuación del modelo matemático en L/min

Cálculo realizado con los gráficos de catálogo del fabricante a presión de 100 bares:

$$\text{a 600 rpm:} \quad \eta_v = \frac{19,2}{0,0401(600)} = 0,798$$

$$\text{a 1 000 rpm:} \quad \eta_v = \frac{35}{0,0401(1\,000)} = 0,873$$

$$\text{a 1 200 rpm:} \quad \eta_v = \frac{43,08}{0,0401(1\,200)} = 0,895$$

$$\text{a 1 500 rpm:} \quad \eta_v = \frac{54,23}{0,0401(1\,500)} = 0,902$$

$$\text{a 1 800 rpm:} \quad \eta_v = \frac{66,69}{0,0401(1\,800)} = 0,924$$

$$\text{a 2 500 rpm:} \quad \eta_v = \frac{93,46}{0,0401(2\,500)} = 0,932$$

Cálculos realizados con la ecuación 1.21 para rendimiento volumétrico:

$$\text{ecuación modelizada:} \quad \eta_v = 0,9850 - \frac{4,995 + 1,1085\,p}{n}$$

$$\text{a 600 rpm:} \quad \eta_v = 0,9850 - \left[\frac{4,995 + 1,1085(100)}{600}\right] = 0,792$$

$$\text{a 1 000 rpm:} \quad \eta_v = 0,9850 - \left[\frac{4,995 + 1,1085(100)}{1\,000}\right] = 0,869$$

$$\text{a 1 200 rpm:} \quad \eta_v = 0,9850 - \left[\frac{4,995 + 1,1085(100)}{1\,200}\right] = 0,888$$

$$\text{a 1 500 rpm:} \quad \eta_v = 0,9850 - \left[\frac{4,995 + 1,1085(100)}{1\,500}\right] = 0,908$$

$$\text{a 1 800 rpm:} \quad \eta_v = 0,9850 - \left[\frac{4,995 + 1,1085(100)}{1\,800}\right] = 0,921$$

$$\text{a 2 500 rpm:} \quad \eta_v = 0,9850 - \left[\frac{4,995 + 1,1085(100)}{2\,500}\right] = 0,939$$

La tabla 5, muestra los valores de rendimiento volumétrico obtenidos de los gráficos de catálogo y los obtenidos por la ecuación de modelización, junto al cálculo del porcentaje de error relativo.

Tabla 5. *Rendimiento volumétrico y error relativo de los resultados obtenido por la ecuación de modelización con respecto a los de la gráfica del fabricante de la bomba A02-12, a 100 bar.*

	Rendimiento volumétrico		
r.p.m	Con los datos gráficos del catálogo	Con la fórmula de modelización	% error relativo (valor absoluto)
600	0,798	0,792	0,762
1 000	0,873	0,869	0,420
1 200	0,895	0,888	0,759
1 500	0,902	0,908	0,678
1 800	0,924	0,921	0,357
2 500	0,932	0,939	0,686

Hay incertidumbre en los valores numéricos obtenidos de los gráficos ya que se depende de una buena representación de las imágenes y ampliar lo suficiente para hacer una buena lectura, sin embargo, a pesar de estos inconvenientes, se puede ver que el valor más alto del error relativo se alcanza en la frecuencia de rotación de 600 rpm con un error relativo del 0,762%.

Siguiendo el procedimiento anterior presentamos la tabla 6 con los valores de rendimiento volumétrico obtenido del gráfico del fabricante y el modelizado con la ecuación junto con el porcentaje del error relativo para una presión de trabajo de 150 bar.

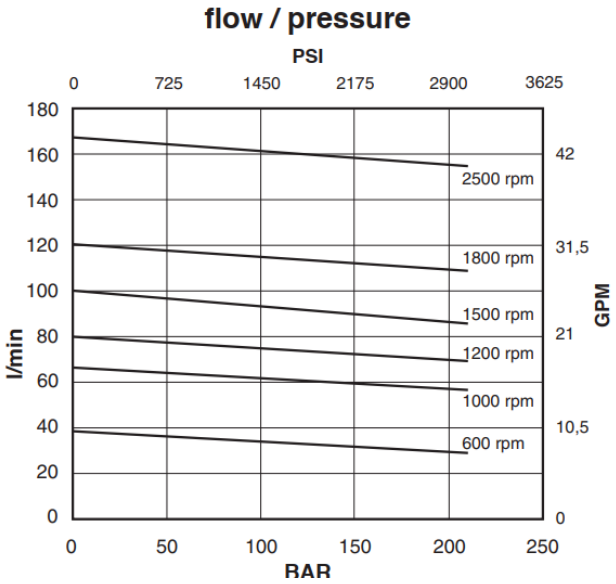
Tabla 6: *Rendimiento volumétrico y error relativo de los resultados obtenido por la ecuación de modelización con respecto a los de la gráfica del fabricante de la bomba A02-12, a 150 bar.*

	Rendimiento volumétrico		
r.p.m	Con los datos gráficos del catálogo	Con la fórmula de modelización	% error relativo (valor absoluto)
600	0,719	0,699	2,710
1 000	0,825	0,814	1,359
1 200	0,847	0,842	0,588
1 500	0,866	0,871	0,576
1 800	0,901	0,890	1,186
2 500	0,905	0,916	1,221

Para este caso hay un aumento en los valores del error relativo, siendo el valor más alto cuando la frecuencia de giro es de 600 rpm con un valor del 2,710% y de igual forma a 1 000 y 2 500 rpm se tiene un valor de porcentaje de error relativo de 1,359% y 1,221% respectivamente.

La metodología antes desarrollada puede seguir aplicándose a otros cartuchos del modelo HQ A02 y lo aplicaremos para el cartucho más grande de esta serie, modelo A02-21, cuyo volumen de cilindrada es de 67,5 cm3/rev, y su diagrama caudal vs presión es el mostrado en la figura 5.

Figura 5: *Gráfico de caudal vs presión a varias frecuencias de rotación de una bomba modelo BQ02-A02-21 (B&C HYDRAULICS, 2015)*



La ecuación linealizada, del modelo A02-21 para el caudal en L/min, es la siguiente:

$$G = 0,0505\,p + 0,0668n - 0,6499 \quad (0.23)$$

Aplicamos la definición del rendimiento volumétrico, obteniendo la siguiente expresión:

$$\eta_v = \frac{G_{real}}{G_{teórico}} = \frac{-0,0505\,p + 0,0668n - 0,6499}{0,0675n}$$

Si realizamos la división a cada término del numerador y haciendo un ordenamiento de los términos, obtendremos la ecuación del rendimiento volumétrico modelizada para el modelo A02-21:

$$\eta_v = 0,9896 - \frac{9,628 + 0,748\,p}{n} \quad (0.24)$$

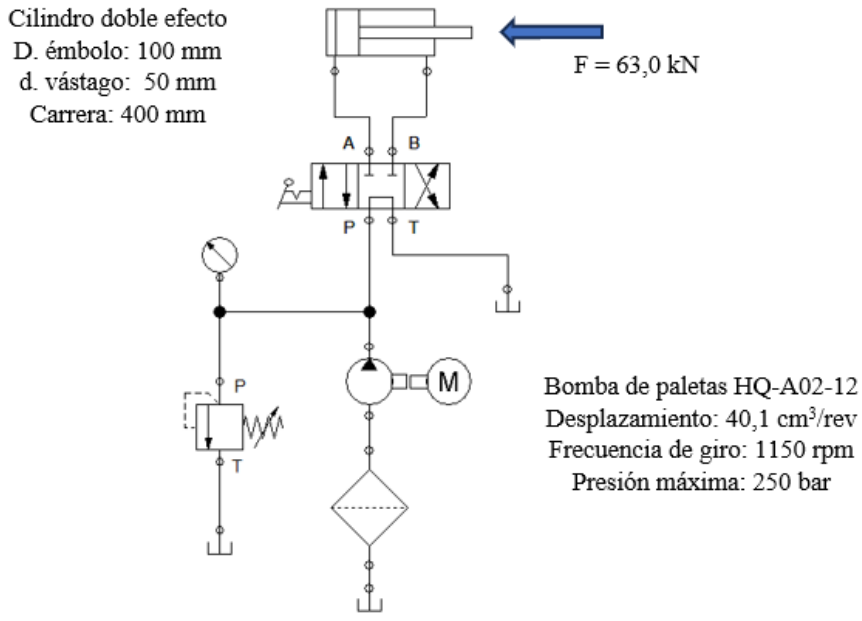
Si volvemos a utilizar los datos de las gráficas del fabricante con los datos obtenidos de la ecuación del modelo matemático y agrupamos los resultados para las diferentes frecuencias de giro, en rpm, obtendremos los valores que se dan en la tabla 7, junto con el cálculo del porcentaje de error relativo de los resultados.

Tabla 7: *Rendimiento volumétrico y error relativo de los resultados obtenido por la ecuación de modelización con respecto a los de la gráfica del fabricante de la bomba A02-21, a 100 bar.*

	Rendimiento volumétrico		
r.p.m	Con los datos gráficos del catálogo	Con la fórmula de modelización	% error relativo (valor absoluto)
600	0,840	0,849	1,117
1 000	0,919	0,904	1,453
1 200	0,926	0,919	0,722
1 500	0,919	0,933	1,611
1 800	0,947	0,949	0,402
2 500	0,954	0,956	0,184

La utilidad de conocer el rendimiento volumétrico de una bomba hidráulica de paletas viene al realizar cálculos en circuitos en los que se desea conocer el caudal de fluido que se envía a los actuadores como son los cilindros hidráulicos. Hemos considerado colocar un ejemplo práctico de cómo utilizar la modelización del rendimiento volumétrico de la bomba hidráulica en el circuito de la figura 6. La bomba es del modelo HQ-A02-12 que alimenta a un circuito con un cilindro hidráulico que tiene una fuerza a vencer total de 63,0 kN. La simbología y el esquema propuesto se utiliza en cursos dictados de Hidráulica y Neumática, siguiendo la normativa DIN (Christiani, 2015).

Figura 6: *Circuito hidráulico de fuerza para mover dos cilindros de doble efecto. Realizado con el software FESTO FLUIDSIM Hidráulica (FESTO Didactic GmbH & Co, 1996 - 2010)*



Para realizar trabajo contra la fuerza de 63,0 kN es necesario realizar una presión con la cual el fluido empuje dicha carga, para determinar el valor numérico utilizaremos la definición de presión (Wilson y otros, 2007).

$$p = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi D^2} \qquad (0.25)$$

Reemplazando con los valores numéricos la presión será de:

$$p = \frac{4(63000)}{\pi(100)^2} = 8,02 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \approx 80,0 \text{ bar}$$

Asumiendo que hay caída de presión en la válvula direccional y conductos de aproximadamente 20 bar, el valor de presión que generaría la bomba para empujar el fluido hidráulico, estaría en los 100 bar.

Para obtener el rendimiento volumétrico utilizamos la ecuación 1.21 con la presión de 100 bar y la frecuencia de giro de la bomba de 1150 rpm, realizando los reemplazos numéricos, se tiene:

$$\eta_v = 0,9850 - \frac{4,995 + 1,1085\,p}{n} = 0,9850 - \frac{4,995 + 1,1085(100)}{1\,150} = 0,884$$

Aplicando la ecuación 1.12, el caudal real que manejaría la bomba sería:

$$G = \eta_v C_b n = 0,884(40,1)(1\,150) = 40\,777 \frac{\text{cm}^3}{\text{min}} \left(\approx 40,8 \frac{\text{L}}{\text{min}} \right)$$

4. Conclusiones

Los fabricantes de bombas tipo paletas dan tablas o gráficas en las que se muestran la variación del caudal con la presión de trabajo y la frecuencia de giro de pruebas que ellos realizan en sus equipos. La determinación del rendimiento volumétrico presenta un importante ítem para calcular características de funcionamiento cuando se trabajan en diferentes condiciones de presión y frecuencia de giro. El presente trabajo nos ha permitido una forma de tener los valores de rendimiento volumétrico para condiciones diferentes a las mostradas en datos tabulados o gráficas. utilizando una ecuación lineal que permite encontrar el rendimiento volumétrico en función de dos parámetros importantes de una bomba, la presión de trabajo y la frecuencia de giro, con una buena aproximación de los resultados del modelo con los calculados con los gráficos del fabricante. El uso de hojas de cálculo facilita la determinación de líneas de

tendencia de las curvas de caudal vs presión y realizar los promedios necesarios para la determinación de las ecuaciones. En este procedimiento se depende de los datos entregados por el fabricante sean lo más precisos posibles. Los valores de error relativo no exceden del 3% entre los resultados del modelo con los obtenidos de los gráficos del fabricante, lo que indica una buena aproximación para cálculos de parámetros en circuitos hidráulicos de fuerza.

Bibliografía

Alvarez Vilchi, D. (23 de 07 de 2015). Manual de hidráulica, neumática y programación de PLC´s: Automatización industrial. (1.0). México: Asociación Mexicana de Robótica y Mecatrónic.

B&C HYDRAULICS. (2015). B&C HYDRAULICS-VANE PUMPS. Obtenido de https://www.bcit.it/media/BC/categories/palette/bq/pdf_eng_bq/B&C_CAT_BQ_BQ02_REV4E.pdf

Christiani, D.-I. P. (2015). Tablas de Metalmecánica. GmbH&Co KG.

Creús Solé, A. (2007). Neumática e Hidráulica. España: MARCOMBO.

FESTO Didactic GmbH & Co. (1996 - 2010). FluidSIM4 Hidráulica.

Fornarelli, F., Lippolis, A., Oresta, P., & Posa, A. (2018). Investigation of a pressure compensated vane pump. Energy Procedia, 148, 194-201. https://doi.org/10.1016/j.egypro.2018.08.068

Giancoli, D. C. (1997). Física. Principios con aplicaciones (Cuarta ed.). México: Prentice Hall Hispanoamérica S.A.

González González, C., & Zeleny Vásquez, J. (1995). Metrología (Primera ed.). Mexico: McGraw Hill.

Gutiérrez Pulido, H., & De la Vara Salazar, R. (2012). Análisis y diseño de experimentos. México: McGraw-Hill/Interamericana Editores S.A.

He, S., Liu, X., Xiao, S., Liu, G., & Cai, H. (2020). Performance prediction and experimental study of variable displacement vane oil pump. The Journal of Engineering, 2020(14), 936-942. https://doi.org/10.1049/joe.2020.0047

Inaguma, Y., & Yoshida, N. (2015). Small High-Efficiency Vane Pump Based on Vane Pump Theory. SAE International Journal of Passenger Cars-Mechanical Systems, 8(2), 614-623.

https://doi.org/https://doi.org/10.4271/2015-01-1496

Lobsinger, T., Hieronymus, T., & Brenner, G. (2020/1). A CFD Investigation of a 2D Balanced Vane Pump Focusing on Leakage Flows and Multiphase Flow Characteristics. Energies, 13(13), 3314. https://doi.org/10.3390/en13133314

Mott, R. (2015). Mecánica de Fluidos (Séptima ed.). México: Pearson Educación de México, S.A.

Muncie Power Products. A Member of the Interpump Group. (05 de 2020). Muncie Power Products. Obtenido de https://www.munciepower.com/: https://www.munciepower.com/cms/files/Products/Literature/Documents/Training/TR-G93-01S.pdf

Paneque Rondón, P., Romantchik Kriuskova, E., Perez Sobrevilla, L., Durán Hernández, R., & Castillo Calderín, R. (diciembre de 2013). Evaluación de dos bombas hidráulicas de engranajes de desplazamientos 32 y 50 cm3/rev. Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias, 22(RNPS-0111), 58-62.

Pedroza González, E. (2018). Hidráulica básica: historia, conceptos previos y ecuaciones (Primera ed.). México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.

Pérez Pupo, J., & Navarro Ojeda, M. (2020). Oleohidráulica 1. Riobamba, Ecuador: Instituto de Investigaciones. Dirección de Publicaciones Científicas ESPOCH.

Pérez Pupo, R. (2018). Sistemas hidráulicos en la maquinaria agrícola. Riobamba, Ecuador: Instituto de investigaciones. Dirección de Publicaciones Científicas ESPOCH.

Rundo, M., Altare, G., & Casoli, P. (2019). Simulation of the Filling Capability in Vane Pumps. Energies, 12(2), 283. https://doi.org/10.3390/en12020283

Salvador de las Heras. (2011). Fluidos, bombas e instalaciones hidráulicas (Primera ed.). Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC.

Serrano Nicolas, A. (2002). Oleohidráulica. McGraw-Hill/Interamericana de España S.A.

Wilson, F., Buffa, A., & Bo, L. (2007). Física. México: PEARSON EDUCACIÓN.