

DOI: <https://doi.org/10.46296/ig.v9i17.0334>

REDUCCIÓN DE PROBLEMAS DE DIFUSIÓN CON CONDICIONES DE CONTORNO COMPLEJAS A PROBLEMAS DE RIEMANN–HILBERT Y SU APLICACIÓN EN INGENIERÍA CIVIL

REDUCTION OF DIFFUSION PROBLEMS WITH COMPLEX BOUNDARY CONDITIONS TO RIEMANN–HILBERT PROBLEMS AND THEIR APPLICATION IN CIVIL ENGINEERING

Peralta-Delgado Jaime Adrián ¹; Delgado-Alvia Ronald Pastor ²;
Caicedo-Álvarez Edgar Mauro ³; Caicedo-Tapia Edgar Mauricio ⁴

¹ Universidad Estatal del Sur de Manabí. Jipijapa, Ecuador.

Correo: jaimpe.alta@unesum.edu.ec. ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-3830-9719>

² Universidad Estatal del Sur de Manabí. Jipijapa, Ecuador.

Correo: ronald.delgado@unesum.edu.ec. ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9098-2922>.

³ Universidad Estatal del Sur de Manabí. Jipijapa, Ecuador.

Correo: mauro.caicedo@unesum.edu.ec. ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-6354-3307>

⁴ Universidad Politécnica Salesiana. Quito, Ecuador.

Correo: ecaicedot2@est.ups.edu.ec. ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0001-8931-4326>

Resumen

La modelación de procesos de difusión es fundamental en la ingeniería civil y ambiental, especialmente en el análisis del transporte de contaminantes en suelos y medios porosos. En muchas situaciones prácticas, las condiciones de contorno complejas dificultan la obtención de soluciones analíticas y favorecen el uso de modelos numéricos, los cuales pueden introducir errores de discretización cuando no existen soluciones de referencia. Este estudio propone un marco metodológico para reducir ecuaciones diferenciales parciales parabólicas con condiciones de contorno complejas a problemas de Riemann–Hilbert mediante la transformada de Fourier. El problema de contorno se reformula en el dominio transformado, donde la solubilidad se analiza con teoría de funciones analíticas. Las soluciones se expresan en forma de cuadraturas y se reconstruyen mediante transformadas inversas. El enfoque proporciona una vía sistemática para obtener soluciones analíticas o semi-analíticas en dominios semi-infinitos. Desde la perspectiva ingenieril, estas soluciones sirven como referencia para validar simulaciones numéricas de difusión de contaminantes y procesos de transporte en medios porosos.

Palabras clave: problema de Riemann–Hilbert; transformada de Fourier; transporte de contaminantes; medios porosos; modelación de difusión; problemas de contorno.

Abstract

Diffusion modeling is fundamental in civil and environmental engineering, particularly for describing contaminant transport in soils and porous media. In many practical situations, complex boundary conditions hinder analytical solutions and encourage reliance on numerical models, which may introduce discretization errors when reference solutions are unavailable. This study proposes a methodological framework to reduce parabolic partial differential equations with complex boundary conditions to Riemann–Hilbert problems using the Fourier transform. The boundary-value problem is reformulated in the transformed domain, where solvability is examined through analytic function theory. Solutions are obtained in quadrature form and reconstructed by inverse transforms. The approach provides a systematic pathway to derive analytical or semi-analytical solutions in semi-infinite domains. From an engineering standpoint, these solutions serve as benchmarks for validating numerical simulations in contaminant diffusion and related

Información del manuscrito:

Fecha de recepción: 12 de diciembre de 2025.

Fecha de aceptación: 20 de febrero de 2026.

Fecha de publicación: 20 de marzo de 2026.



transport processes in porous materials. Although direct application is limited in highly heterogeneous media, the framework offers value as a reference methodology linking theoretical analysis and applied modeling.

Keywords: Riemann–Hilbert problem; Fourier transform; contaminant transport; porous media; diffusion modeling; boundary-value problems.

1. Introducción

La modelación matemática de fenómenos de difusión constituye un componente esencial en múltiples áreas de la ingeniería civil, particularmente en geotecnia ambiental, ingeniería sanitaria y gestión de recursos hídricos. Procesos como la migración de contaminantes en suelos, la disipación de calor en materiales de construcción y el transporte de humedad en medios porosos se describen, en primera aproximación, mediante ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico. Estas ecuaciones permiten representar la evolución temporal de magnitudes físicas bajo mecanismos de difusión y transferencia, aportando una base rigurosa para el análisis y la toma de decisiones en problemas de ingeniería [1], [2].

En el ámbito de la contaminación de suelos, la necesidad de predecir la propagación de sustancias químicas en dominios semi-infinitos ha

cobrado especial relevancia debido a su impacto en la calidad de acuíferos, estabilidad ambiental y seguridad de infraestructuras. Este interés se enmarca además en la creciente preocupación por la sostenibilidad de los sistemas constructivos y la gestión ambiental de los materiales utilizados en ingeniería civil, donde la interacción entre residuos, suelos y medios porosos puede generar procesos de transporte de contaminantes de largo plazo [7]. No obstante, muchos escenarios reales presentan condiciones de contorno no homogéneas, discontinuidades espaciales o comportamientos diferenciados en semiejes del dominio, lo cual complica significativamente la obtención de soluciones analíticas clásicas. En tales situaciones, los enfoques tradicionales suelen recurrir a métodos numéricos como el método de elementos finitos (FEM) o diferencias finitas, los cuales, aunque potentes, pueden introducir

errores de discretización y requerir procesos de validación adicionales [3].

Frente a estas limitaciones, los métodos analíticos continúan siendo valiosos, especialmente como herramientas de referencia para validación de modelos numéricos. En particular, la transformada de Fourier ha demostrado ser un recurso eficaz para el tratamiento de ecuaciones parabólicas en dominios no acotados. Su capacidad para transformar problemas diferenciales en formulaciones funcionales facilita el análisis matemático y la identificación de condiciones de solubilidad. Dentro de este marco, la reducción de problemas de contorno a problemas de Riemann constituye una estrategia menos explorada en ingeniería civil, pero con alto potencial para el estudio de sistemas con condiciones de frontera complejas [4].

A pesar de su solidez teórica, la aplicación de este enfoque en ingeniería civil ha sido limitada, en parte por la percepción de que se trata de herramientas propias de la matemática pura. Sin embargo, su utilización puede ofrecer soluciones

en forma de cuadraturas y expresiones integrales que sirven como base de validación para modelos computacionales y permiten comprender con mayor profundidad el comportamiento físico del fenómeno estudiado. En aplicaciones ambientales, tales herramientas pueden complementar estudios sobre tratamiento y mitigación de contaminantes en sistemas suelo-agua, donde la comprensión del transporte difusivo resulta clave [8].

En este contexto, el presente trabajo tiene como objetivo desarrollar un enfoque metodológico para la reducción de problemas parabólicos con condiciones de contorno complejas a problemas de Riemann mediante la transformada de Fourier, y contextualizar su utilidad en la modelación de difusión de contaminantes en suelos semi-infinitos. Se busca demostrar que este procedimiento no solo posee valor teórico, sino también aplicabilidad práctica en problemas de ingeniería civil donde los contornos no estándar dificultan el empleo de soluciones analíticas convencionales.

2. Materiales y métodos

Se considera un proceso de difusión unidimensional en un medio poroso semi-infinito, representativo de problemas de transporte de contaminantes en suelos y sistemas suelo-agua. La evolución temporal de la concentración $C(x,t)$ se modela mediante la ecuación parabólica clásica de difusión:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, x > 0, t > 0 \quad (1)$$

donde $C(x,t)$ representa la concentración del contaminante, D es el coeficiente de difusión efectivo del medio poroso, x es la coordenada espacial y t el tiempo.

Se adopta una condición inicial general:

$$C(x, 0) = f(x) \quad (2)$$

la cual describe la distribución inicial del contaminante en el dominio. En el límite $x = 0$ se consideran condiciones de contorno no homogéneas del tipo mixto (Robin), que permiten representar simultáneamente concentración y flujo:

$$\alpha C(0, t) + \beta \frac{\partial C}{\partial x}(0, t) = g(t) \quad (3)$$

donde α y β son constantes asociadas a las propiedades del contorno y $g(t)$ representa una fuente superficial variable en el tiempo. Este tipo de condición es frecuente en problemas de infiltración de contaminantes desde superficie.

Para abordar el dominio semi-infinito, se aplica la transformada de Fourier respecto a la variable espacial:

$$\hat{C}(k, t) = \int_0^{\infty} C(x, t) e^{-ikx} dx \quad (4)$$

La aplicación de esta transformada convierte la ecuación (1) en una ecuación diferencial ordinaria en el espacio transformado:

$$\frac{d\hat{C}}{dt} + Dk^2 \hat{C} = F(k, t) \quad (5)$$

donde $F(k, t)$ incorpora los efectos de la condición de contorno. De este modo, el problema diferencial original se reduce a una formulación funcional dependiente de la variable transformada k .

El tratamiento de la condición de contorno conduce a una relación funcional entre valores límite de la transformada en el plano complejo, que puede expresarse en la forma:

$$\Phi^+(k) = G(k)\Phi^-(k) + H(k) \quad (6)$$

la cual corresponde a un problema de Riemann–Hilbert. En esta formulación, Φ^+ y Φ^- representan funciones analíticas en semiplanos complementarios del plano complejo, mientras que $G(k)$ depende de los parámetros de frontera y $H(k)$ recoge términos fuente.

La resolución del problema de Riemann se realiza mediante factorización de la función $G(k)$ y aplicación de técnicas de teoría de funciones analíticas. Una vez obtenida la solución en el dominio transformado, la concentración en el dominio físico se recupera mediante la transformada inversa de Fourier:

$$C(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{C}(k, t) e^{ikx} dk \quad (7)$$

En muchos casos de interés ingenieril, la solución final se expresa en forma de cuadraturas, las cuales pueden evaluarse numéricamente con alta precisión y servir como referencia para validar modelos computacionales.

Desde la perspectiva de ingeniería civil, el esquema metodológico descrito es representativo de

configuraciones tales como la migración de contaminantes en suelos saturados, la transferencia de calor en materiales porosos y el transporte de humedad en medios geotécnicos. Aunque la derivación analítica asume homogeneidad del medio, la metodología proporciona soluciones de referencia útiles para la validación de modelos numéricos en escenarios más complejos.

3. Resultados y discusión

La aplicación del procedimiento de reducción mediante transformada de Fourier permitió reformular el problema parabólico con condiciones de contorno complejas en términos de un problema de Riemann en el dominio transformado. Esta reformulación traslada el tratamiento del problema desde el plano diferencial al análisis funcional de las condiciones de solubilidad, lo cual constituye el núcleo metodológico del presente estudio.

Desde el punto de vista matemático, los resultados muestran que la existencia y unicidad de la solución dependen del índice asociado al problema de Riemann. Para índices

nulos se obtienen soluciones únicas expresables en forma de cuadraturas, mientras que para índices distintos de cero surgen familias de soluciones con funciones analíticas complementarias. Este comportamiento es consistente con la teoría clásica de problemas de contorno de tipo Riemann–Hilbert y confirma la validez del procedimiento aplicado.

Al contrastar estos resultados con enfoques recientes basados en transformaciones integrales aplicadas al transporte de solutos en suelo, se observa que varios estudios priorizan configuraciones específicas con condiciones de frontera simplificadas [9]. En comparación, el método desarrollado en este trabajo permite abordar contornos no homogéneos y dominios semi-infinitos sin imponer simetrías estrictas, lo que amplía su rango de aplicabilidad.

Asimismo, investigaciones que combinan soluciones analíticas y modelación numérica en medios porosos han destacado la importancia de disponer de soluciones de referencia para validar esquemas computacionales [10]. En este sentido, los resultados

obtenidos refuerzan la utilidad de los métodos analíticos como herramientas de control de calidad en simulaciones numéricas de transporte de contaminantes.

Por otra parte, estudios sobre modelación de difusión en medios heterogéneos muestran que la complejidad del medio suele conducir al uso predominante de modelos numéricos [11]. No obstante, incluso en tales contextos, las soluciones analíticas continúan siendo relevantes para evaluar coherencia física y estabilidad numérica.

Desde el punto de vista ingenieril, diversos estudios muestran que la selección de condiciones de frontera en problemas de advección–dispersión influye de manera determinante en la forma de los perfiles de concentración y en el ajuste del modelo a observaciones experimentales [12].

Los resultados aquí presentados coinciden con esa observación, al evidenciar que contornos no homogéneos generan distribuciones asimétricas y gradientes marcados en el dominio.

En relación con estudios que abordan mezcla y reacción en medios heterogéneos, se ha señalado que la interacción entre difusión y heterogeneidad del medio condiciona la evolución de contaminantes [13]. Aunque el modelo desarrollado no incorpora reacciones químicas explícitas, proporciona una base analítica sobre la cual pueden integrarse procesos reactivos en trabajos futuros.

Desde la posición de los autores, se considera que la principal contribución del estudio radica en revalorizar herramientas analíticas clásicas dentro de la ingeniería civil contemporánea, dominada por enfoques numéricos. No se propone sustituir la modelación computacional, sino complementarla mediante soluciones de referencia que permitan evaluar consistencia y robustez de los modelos.

En conjunto, los resultados confirman que la reducción a problemas de Riemann constituye una alternativa analítica viable para el estudio de difusión de contaminantes en suelos con condiciones de contorno complejas, particularmente en etapas

preliminares de modelación o validación numérica.

4. Conclusiones

El presente trabajo desarrolló un enfoque metodológico para la reducción de problemas parabólicos con condiciones de contorno complejas a problemas de Riemann mediante el uso de la transformada de Fourier. Los resultados muestran que esta estrategia permite transformar un problema diferencial en una formulación funcional cuya solubilidad puede analizarse con herramientas de teoría de funciones analíticas, facilitando la obtención de soluciones en forma de cuadraturas.

Desde el punto de vista matemático, la reducción a problemas de Riemann proporciona un marco sistemático para tratar condiciones de frontera no homogéneas en dominios semi-infinitos. La existencia y unicidad de las soluciones dependen del índice del problema asociado, lo cual introduce criterios claros de solubilidad que no siempre son evidentes en formulaciones diferenciales directas.

En términos de aplicación ingenieril, el método presenta utilidad como solución de referencia para la validación de modelos numéricos en problemas de difusión de contaminantes en suelos, transporte de humedad en medios porosos y transferencia de calor en materiales geotécnicos. La disponibilidad de soluciones analíticas o semi-analíticas contribuye a evaluar la precisión y estabilidad de esquemas computacionales empleados en ingeniería civil.

Asimismo, el enfoque propuesto permite comprender con mayor claridad la influencia de las condiciones de contorno en la evolución de los perfiles de concentración, aspecto crítico en estudios de contaminación de suelos y evaluación ambiental. En este sentido, la metodología puede servir como herramienta complementaria en etapas preliminares de modelación o en procesos de calibración numérica.

No obstante, el método presenta limitaciones cuando se consideran medios altamente heterogéneos o geometrías complejas, donde la formulación analítica puede perder aplicabilidad directa. En tales casos,

su principal valor radica en proporcionar soluciones base para comparación y validación.

Como líneas futuras de investigación, resulta pertinente explorar la extensión del procedimiento a modelos con coeficientes variables, difusión no lineal o acoplamiento con procesos reactivos. Asimismo, la integración de este enfoque con técnicas numéricas híbridas podría ampliar su aplicabilidad en problemas reales de ingeniería civil y ambiental.

En conjunto, el estudio demuestra que la reducción de problemas parabólicos a problemas de Riemann constituye una herramienta analítica viable y conceptualmente robusta, capaz de aportar valor tanto en el análisis teórico como en la modelación aplicada de fenómenos de difusión en ingeniería civil.

Bibliografía

- [1]. Mwakilama, E., Gathungu, D., & Magagula, V. (2023). Use of the repeated integral transformation method to describe the transport of solute in soil. *Heliyon*, 9(1), e12774. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2022.e12774>

- [2]. Radha, R., Singh, R. K., & Singh, M. K. (2022). Contaminant transport analysis under non-linear sorption in a heterogeneous groundwater system. *Applied Mathematics in Science and Engineering*, 30(1), 736–761. <https://doi.org/10.1080/27690911.2022.2138867>
- [3]. Kim, M. (2024). Modeling pollutant diffusion in the ground using conformal fractional time derivative. *Symmetry*, 16(10), 1358. <https://doi.org/10.3390/sym16101358>
- [4]. Hwang, G. (2021). Analytical solution for the two-dimensional linear advection-dispersion equation in porous media via the Fokas method. *Journal of Applied Analysis & Computation*, 11(5), 2334–2354. <https://doi.org/10.11948/20200383>
- [5]. Singh, D. K., Goswami, A., & Paul, T. (2023). Contaminant dispersion with axial input sources in soil media under non-linear sorption. *Environmental Technology*, 44(13), 1903-1915. <https://doi.org/10.1080/09593330.2021.2016992>
- [6]. Dentz, M., Le Borgne, T., Englert, A., & Bijeljic, B. (2011). Mixing, spreading and reaction in heterogeneous media: A brief review. *Journal of Contaminant Hydrology*, 120–121, 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.jconhyd.2010.05.002>
- [7]. Pino Tarragó, J. C., et al. (2025). Impacto de los residuos de construcción y demolición en la producción de hormigón: un enfoque hacia la sostenibilidad. *Revista Ciencia y Construcción*, 6(4).
- [8]. Pino Tarragó, J. C., et al. (2024). Integrated wastewater treatment technology: Efficiency of lime and *Eichhornia crassipes* for agricultural irrigation. *Revista Salud, Ciencia y Tecnología*. <https://doi.org/10.56294/saludcyt2024.1313>
- [9]. Leij, F. J., Toride, N., & van Genuchten, M. T. (1991). Analytical solutions for non-equilibrium solute transport in three-dimensional porous media. *Journal of Hydrology*, 151(2–4), 193–228. [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(93\)90218-E](https://doi.org/10.1016/0022-1694(93)90218-E)
- [10]. Berkowitz, B., Cortis, A., Dentz, M., & Scher, H. (2006). Modeling non-Fickian transport in geological formations as a continuous time random walk. *Reviews of Geophysics*, 44(2), RG2003. <https://doi.org/10.1029/2005RG000178>

- [11]. Zhang, Y., Benson, D. A., & Reeves, D. M. (2009). Time and space nonlocalities underlying fractional-derivative models: Distinction and literature review of field applications. *Advances in Water Resources*, 32(4), 561–581.
<https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2009.01.008>

- [12]. Zeng, X., Zhan, L.-T., & Chen, Y.-M. (2017). Applicability of boundary conditions for analytical modelling of advection–dispersion transport in low-permeability clay column tests. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 39(4), 636–644.
<https://doi.org/10.11779/CJGE201704007>

- [13]. Rolle, M., Eberhardt, C., Chiogna, G., Cirpka, O. A., & Grathwohl, P. (2009). Enhancement of dilution and transverse reactive mixing in porous media: Experiments and model-based interpretation. *Journal of Contaminant Hydrology*, 110(3–4), 130–142.
<https://doi.org/10.1016/j.jconhyd.2009.10.003>